

1911.

LIBRARY  
MICHIGAN STATE NORMAL  
COLLEGE

No. 5.

# ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 34. Heft 5.

DER GANZEN REIHE 339. BANDES 5. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG, 1911.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH.

DÜRRIENSTRASSE 16.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.*

*(Ausgegeben am 9. Mai 1911.)*

# Inhalt.

1. Philipp Frank und Hermann Rothe. Über die Transformation der Raumzeitkoordinaten von ruhenden auf bewegte Systeme . . . . .	825
2. Ferencz Jüttner. Das Maxwell'sche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie . . . . .	856
3. H. Baerwald. Untersuchung der Einwirkung des Magnetfeldes auf den Dopplereffekt der Kanalstrahlen . . . . .	883
4. Jan Kroò. Über den Fundamentalsatz der statistischen Mechanik . . . . .	907
5. J. Francèk und R. Pohl. Bemerkung zu den Versuchen des Hrn. Marx über die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen . . . . .	936
6. B. Mackù. Über den Einfluß des frühzeitigen Anschlössens des Funkens auf Dämpfungsmessungen . . . . .	941
7. Felix Biske. Die Krümmung der Spektrallinien beim Plangitter . . . . .	971
8. Hermann Rohmann. Messung von Kapazitätsänderungen mit schnellen Schwingungen, angewandt auf die Vergleichung der Dielektrizitätskonstanten von Gasen . . . . .	979
9. W. Steubing. Zur Spektroskopie des Sauerstoffs. Antwort an Hrn. Kayser . . . . .	1003
10. J. Stark. Hrn. H. Kayser zur Antwort . . . . .	1011
11. H. Merczyng. Elektrische Dispersion von Wasser und Äthylalkohol für sehr kurze Wellen . . . . .	1015
12. A. Joffé. Über das magnetische Feld der Kathodenstrahlen . . . . .	1026

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleleherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.







# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 34.

### 1. Über

*die Transformation der Raumzeitkoordinaten  
von ruhenden auf bewegte Systeme;  
von Philipp Frank und Hermann Rothe.*

Die Transformationsgleichungen, welche die Raumzeitkoordinaten  $(x, y, z, t)$  eines ruhenden Systems mit denen in einem bewegten System  $(x', y', z', t')$  verknüpfen, dessen Geschwindigkeit  $q$  nach Richtung und Größe konstant ist, haben in der heutigen Physik eine so große Wichtigkeit erlangt, daß es sich wohl lohnt, genau zu prüfen, welche Voraussetzungen physikalischer oder anderer Natur eigentlich notwendig sind, um die Gestalt dieser Gleichungen abzuleiten. Nach der Relativitätstheorie sind sie durch die *Lorentztransformation* gegeben. Diese lautet bekanntlich, wenn wir mit  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bezeichnen und die Koordinatensysteme so wählen, daß zur Zeit Null das bewegte mit dem ruhenden zusammenfällt und sich dann in der  $x$ -Richtung weiterbewegt:

$$(1) \quad \begin{cases} t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \left( t - \frac{q}{c^2} x \right), \\ x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} (-qt + x). \end{cases}$$

Als Grenzfall für  $c = \infty$  ist in diesen Gleichungen bekanntlich die *Galileitransformation* enthalten:

$$(2) \quad t' = t, \quad x' = -qt + x.$$

Die heute übliche Ableitung der Gleichungen (1) rührt von A. Einstein<sup>1)</sup> her und beruht im wesentlichen auf folgenden Voraussetzungen:

1) A. Einstein, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 4. p. 411 ff. 1907. Eine nähere Ausführung der Einsteinschen Ableitung findet man in der Arbeit: Ph. Frank, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien. Math.-phys. Kl. 118. Abt. IIa. p. 421 ff. 1909.

$\alpha$ ) Wenn  $c$  der Wert der Lichtgeschwindigkeit in bezug auf ein ruhendes System ist, so soll der Wert der Lichtgeschwindigkeit in bezug auf jedes relativ zum ersten gleichförmig geradlinig bewegte System ebenfalls für alle Fortpflanzungsrichtungen  $c$  betragen. Dem entspricht mathematisch die Forderung, daß die Beziehungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad \text{und} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

vermöge der Transformationsgleichungen auseinander folgen sollen.

$\beta$ ) Die Transformationsgleichungen sollen linear homogen in den Koordinaten sein; ihre Koeffizienten können dann nur von  $q$  abhängen.

$\gamma$ ) Wenn man  $q$  durch  $-q$  ersetzt, soll die Transformation in ihre inverse (d. h. nach  $x, y, z, t$  aufgelöste Form) übergehen.

$\delta$ ) Die Kontraktion, welche die Längen vermöge der Bewegung erfahren, soll nur vom Betrage, nicht vom Vorzeichen von  $q$  abhängen.

Wir wollen nun zeigen, daß man die Zahl dieser Voraussetzungen sehr beschränken und insbesondere die scheinbar wichtigste  $\alpha$ ), die Forderung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im ruhenden und bewegten System, fallen lassen kann.

Unsere Ableitung stützt sich vielmehr nur auf folgende beide Voraussetzungen:

A. Die Transformationsgleichungen bilden, wenn wir  $q$  als variablen Parameter auffassen, eine lineare homogene Gruppe.

B. Die Kontraktion der Längen soll nicht vom Vorzeichen, sondern nur vom Betrage von  $q$  abhängen.

Die in A. verlangte Gruppeneigenschaft der Transformationsgleichungen muß notwendig gefordert werden, wenn überhaupt ein für alle Geschwindigkeiten  $q$  gültiger Typus von Transformationsgleichungen existieren soll. Denn wenn die Gleichungen keine Gruppe bildeten, würde die Zusammensetzung zweier Transformationen, also der Übergang von einem System zu einem bewegten mit Hilfe eines Zwischensystems, zu Gleichungen von ganz anderer Gestalt als die ursprünglichen führen.

Wir gehen nun so vor, daß wir zuerst die allgemeinsten Transformationsgleichungen aufstellen, die der Forderung A.

genügen. Durch Spezialisierung derselben erhalten wir alle diejenigen, die auch noch die Forderung B. erfüllen. Als Resultat ergibt sich, daß dann nur Gleichungen übrig bleiben, die entweder gar keine Kontraktion zur Folge haben, oder mit den Lorentzschen (1) übereinstimmen. Die ersteren bilden einen neuen Typus von Transformationsgleichungen (wir nennen sie *Dopplertransformation*) und enthalten die *Galileitransformation* (2) als besonderen Fall.

Einen Teil der hier zum Beweise verwendeten Ansätze und Formeln haben wir schon bei einer anderen Gelegenheit in der Arbeit<sup>1)</sup> „Über eine Verallgemeinerung des Relativitätsprinzips und die dazu gehörige Mechanik“ veröffentlicht, so z. B. das Additionstheorem der Geschwindigkeiten für die allgemeinsten der Forderung A. genügenden Transformationsgleichungen.<sup>2)</sup>

Hr. v. Ignatowsky<sup>3)</sup> hat schon den Versuch gemacht, die Einsteinschen Voraussetzungen auf eine geringere Zahl zu beschränken. Wenn man auch die von ihm stillschweigend gemachten Annahmen ausspricht, kann man den Inhalt seiner Arbeit folgendermaßen wiedergeben: er vermeidet die Voraussetzung  $\alpha$ ) (Konstanz der Lichtgeschwindigkeit), behält aber außer den unsrigen noch die Einsteinsche Forderung  $\gamma$ ) bei. Ferner wendet er sofort alle Voraussetzungen an und stellt nicht die allgemeinsten der Forderung A. genügenden Transformationsgleichungen auf, woraus erst die Stellung der Lorentztransformation innerhalb aller anderen klar ersichtlich würde.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich folgendermaßen: Wir setzen von vornherein:

$$y' = y, \quad z' = z,$$

weil die recht leichte Begründung dieser Gleichungen den Gedankengang nur mit vermeidlicher Schwerfälligkeit belasten würde. Wir betrachten also nur die Transformation von  $x$  und  $t$ .

1) Ph. Frank u. H. Rothe, Sitzungsab. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien. Math.-nat. Kl. 119. Abt. IIa. p. 615ff. 1910.

2) l. c. p. 619, Gleichung (12) und die folgende ohne Nummer.

3) W. v. Ignatowsky, Berichte d. Deutsch. Physik. Ges. p. 788 ff. 1910 und Arch. f. Math. u. Phys. 17. p. 1 ff.

Im Abschnitt I stellen wir die verwendeten Begriffe und Sätze aus der Theorie der Transformationsgruppen kurz zusammen.<sup>1)</sup> In den Abschnitten II und III wenden wir diese Sätze auf die durch Voraussetzung A. bestimmten Transformationsgleichungen an, führen im Abschnitt IV in dieselben einen Parameter<sup>2)</sup>  $q$  ein, der die Eigenschaften einer Geschwindigkeit hat, worauf sich das Additionstheorem der Geschwindigkeiten ergibt und geben im Abschnitt V Beispiele zu den vorangehenden Entwicklungen. Im Abschnitt VI endlich berechnen wir die Gestalt der allgemeinsten der Forderung A. genügenden Transformationsgleichungen und insbesondere die Kontraktion als Funktion der in IV eingeführten Geschwindigkeit  $q$ . Auf diese wenden wir dann in Abschnitt VII unsere Forderung B. an und erhalten so alle Gleichungen, die unserem System von Voraussetzungen genügen.

## I.

1. Es seien  $t, x, p$  drei Veränderliche, von denen wir  $t, x$  als *rechtwinkelige Koordinaten* eines Punktes  $P$  in einer  $t, x$ -Ebene und  $p$  als *Parameter* deuten. Ferner seien:

$$(3) \quad \varphi(t, x, p), \quad \psi(t, x, p)$$

zwei eindeutige, stetige und differenzierbare Funktionen der drei Argumente  $t, x, p$ <sup>3)</sup>, für welche die Funktionaldeterminante:

$$(4) \quad \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(t, x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet und überdies nicht gleichzeitig:

$$(5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial p} = 0$$

ist.

1) Wir beziehen uns dabei überall auf die elementare Darstellung der Gruppentheorie in dem Werke S. Lie u. G. Scheffers, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen, Leipzig 1893.

2) Vgl. auch: Ph. Frank u. H. Rothe, I. c. p. 618.

3) Nötigenfalls sind die drei Veränderlichen  $t, x, p$  auf einen bestimmten Bereich der  $t, x, p$ -Mannigfaltigkeit zu beschränken, dem dann jedes weiterhin in Betracht kommende Wertesystem  $t, x, p$  angehören muß.



Durch die beiden Gleichungen:

$$(6) \quad t' = \varphi(t, x, p), \quad x' = \psi(t, x, p)$$

wird dann, wenn dem Parameter  $p$  ein fester Wert erteilt wird, jedem Wertepaare  $t, x$  ein zweites Wertepaar  $t', x'$  zugeordnet; diese Zuordnung heißt eine *Transformation* und mag mit  $T_p$  bezeichnet werden. Geometrisch bedeutet die Transformation  $T_p$  eine *punktweise Abbildung* der  $t, x$ -Ebene auf eine  $t', x'$ -Ebene, welche, wie im folgenden vorausgesetzt werden soll, auch mit der  $t, x$ -Ebene zusammenfallen kann; dabei beziehen wir überdies die Koordinaten  $t', x'$  der transformierten Punkte  $P'$  zunächst auf dasselbe Koordinatensystem wie die Koordinaten  $t, x$  der ursprünglichen Punkte  $P$ .

2. Durchläuft der Parameter  $p$  stetig die ganze Zahlenreihe oder ein bestimmtes Intervall auf derselben, so erhalten wir eine *Schar*  $\mathfrak{S}$  von  $\infty^1$  Transformationen  $T_p$ , deren jede einem bestimmten Wert von  $p$  entspricht; dieselbe wird auch als eine *eingliedrige* (kontinuierliche) Schar von Transformationen bezeichnet.

Ist  $T_{p'}$  eine zweite Transformation der Schar  $\mathfrak{S}$ , welche zum Parameter  $p'$  gehört und welche das Wertepaar  $t', x'$  in  $t'', x''$  überführt, so daß also:

$$(7) \quad t'' = \varphi(t', x', p'), \quad x'' = \psi(t', x', p')$$

ist, so erhält man durch Elimination von  $t', x'$  aus (6) und (7) die Gleichungen:

$$(8) \quad \begin{cases} t'' = \varphi(\varphi(t, x, p), \psi(t, x, p), p'), \\ x'' = \psi(\varphi(t, x, p), \psi(t, x, p), p'), \end{cases}$$

die eine Transformation  $T$  darstellen, welche  $t, x$  direkt in  $t'', x''$  überführt und das *Produkt* der beiden Transformationen  $T_p$  und  $T_{p'}$  heißt; man schreibt:

$$(9) \quad T = T_p T_{p'},$$

wobei durch die Anordnung der Faktoren des Produktes gleichzeitig die Reihenfolge gegeben ist, in welcher die beiden Transformationen  $T_p$  und  $T_{p'}$  ausgeführt werden sollen. Im allgemeinen ist:

$$(10) \quad T_{p'} T_p \neq T_p T_{p'},$$

d. h. für die Zusammensetzung von Transformationen gilt nicht das *kommutative Gesetz*.

3. Das Produkt  $T$  der beiden Transformationen  $T_p$  und  $T_{p'}$  von  $\mathfrak{S}$  wird im allgemeinen eine Transformation sein, die *nicht* zur Schar  $\mathfrak{S}$  gehört. Ist jedoch das Produkt irgend zweier Transformationen von  $\mathfrak{S}$  immer wieder eine Transformation von  $\mathfrak{S}$ , so sagt man, daß die Transformationen der Schar  $\mathfrak{S}$  die *Gruppeneigenschaft* besitzen. Es ist dann:

$$(11) \quad (T_p T_{p'}) T_{p''} = T_p (T_{p'} T_{p''}),$$

d. h. für Produkte dreier (und auch beliebig vieler) Faktoren gilt das *assoziative Gesetz*.

Besitzt  $\mathfrak{S}$  die Gruppeneigenschaft, d. h. gehört  $T$  zu  $\mathfrak{S}$ , so müssen die Gleichungen (8) die Form:

$$(12) \quad t' = \varphi(t, x; p''), \quad x' = \psi(t, x, p'')$$

annehmen, wobei:

$$(13) \quad p'' = \pi(p, p')$$

eine Funktion von  $p$  und  $p'$  allein ist.

Man sagt nun, die Transformationen einer Schar  $\mathfrak{S}$  bilden eine *Gruppe*  $\mathfrak{G}$ , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

A. Die Transformationen von  $\mathfrak{S}$  besitzen die Gruppeneigenschaft.

B. Es gibt einen Parameterwert  $p = p_0$ , für welchen:

$$(14) \quad \varphi(t, x, p_0) \equiv t, \quad \psi(t, x, p_0) \equiv x$$

ist. Die zu diesem Parameterwerte gehörige Transformation  $T_{p_0}$ , welche durch die Gleichungen:

$$(15) \quad t' = t, \quad x' = x$$

dargestellt wird, läßt also jedes Wertepaar  $t, x$  ungeändert und heißt die *identische* Transformation.

C. Zu jeder Transformation  $T_p$  gibt es in  $\mathfrak{S}$  eine zweite, welche mit  $T_p$  in irgend einer Reihenfolge zusammengesetzt die identische Transformation  $T_{p_0}$  liefert. Diese zweite Transformation heißt die zu  $T_p$  *inverse* Transformation und wird mit  $T_p^{-1}$  bezeichnet, so daß

$$(16) \quad T_p T_p^{-1} = T_p^{-1} T_p = T_{p_0}$$

ist. Die inverse Transformation von  $T_p$  findet man, wenn man die Gleichungen (6) nach  $t$  und  $x$  auflöst, was immer möglich

ist, da die Funktionaldeterminante (4) nicht identisch verschwindet. Als Transformation der Schar  $\mathfrak{S}$  entspricht der inversen Transformation  $T_p^{-1}$  von  $T_p$  ein Parameterwert  $\bar{p}$ , der eine Funktion von  $p$  allein ist und mittels der Bedingung:

$$(17) \quad T_p^{-1} = T_{\bar{p}}$$

gefunden werden kann. Nach (13) genügen die beiden Werte  $p$  und  $\bar{p}$  der Gleichung:

$$(18) \quad \pi(p, \bar{p}) = p_0.$$

Die Gruppe  $\mathfrak{G}$  heißt *eingliedrig*, weil sie aus  $\infty^1$  Transformationen  $T_p$  besteht.

4. Betrachtet man in (13)  $p$  als eine zu transformierende Veränderliche und  $p'$  als Parameter (oder umgekehrt), so definiert diese Gleichung, wenn  $p''$  die transformierte Veränderliche ist, eine eingliedrige Schar von Transformationen, die ebenfalls eine Gruppe  $\mathfrak{P}$  bilden, welche man als die *Parametergruppe* von  $\mathfrak{G}$  bezeichnet.

5. Ist  $\delta p$  eine unendlich kleine Größe, so ist die Transformation, welche zum Parameterwert:

$$(19) \quad p = p_0 + \delta p$$

gehört, von der identischen Transformation unendlich wenig verschieden; sie heißt die *infinitesimale* Transformation der Gruppe und führt einen Punkt  $P = (t, x)$  in einen unendlich benachbarten Punkt  $P'$  über, dessen Koordinaten:

$$(20) \quad t' = t + \delta t, \quad x' = x + \delta x$$

sind, wobei:

$$(21) \quad \delta t = \tau(t, x) \delta p, \quad \delta x = \xi(t, x) \delta p$$

ist, wenn:

$$(22) \quad \varphi_p'(t, x, p_0) \equiv \tau(t, x), \quad \psi_p'(t, x, p_0) \equiv \xi(t, x)$$

gesetzt wird.

In den Gleichungen (21), welche die infinitesimale Transformation definieren, darf  $\delta p$  durch  $\kappa \cdot \delta p$  ersetzt werden, wenn  $\kappa$  eine von Null verschiedene Konstante bedeutet, ohne daß an der Gruppe  $\mathfrak{G}$  selbst etwas Wesentliches geändert wird. Betrachtet man zwei in dieser Weise voneinander abhängige infinitesimale Transformationen als identisch, so enthält jede eingliedrige Gruppe nur eine einzige infinitesimale Trans-

formation. Umgekehrt erzeugt jede beliebige infinitesimale Transformation (21) eine bestimmte eingliedrige Gruppe; die endlichen Gleichungen (6) derselben werden durch Integration des simultanen Systems:

$$(23) \quad \frac{dt'}{\tau(t', x')} = \frac{dx'}{\xi(t', x')} = dp$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$(24) \quad t' = t, \quad x' = x \quad \text{für} \quad p = p_0$$

gefunden.

6. Denkt man sich nun  $x$  als Funktion von  $t$ :

$$(25) \quad x = f(t),$$

so erhält man eine Kurve  $\Gamma$  in der  $t, x$ -Ebene; diese geht mittels der Transformation (6) in eine andere Kurve  $\Gamma'$  mit der Gleichung:

$$(26) \quad x' = f_1(t')$$

über. Setzt man:

$$(27) \quad w = \frac{dx}{dt} = f'(t), \quad w' = \frac{dx'}{dt'} = f_1'(t'),$$

so ist:

$$(28) \quad w' = \frac{\psi'_1(t, x, p) + \psi'_2(t, x, p) \cdot w}{\varphi'_1(t, x, p) + \varphi'_2(t, x, p) \cdot w},$$

wofür zur Abkürzung:

$$(29) \quad w' = \chi(t, x, w, p)$$

geschrieben werden soll, die zu (6) gehörige Transformation von  $w$ . Für  $p = p_0$  erhält man wegen (14):

$$(30) \quad \begin{cases} \varphi'_1(t, x, p_0) \equiv 1, & \varphi'_2(t, x, p_0) \equiv 0, \\ \psi'_1(t, x, p_0) \equiv 0, & \psi'_2(t, x, p_0) \equiv 1, \end{cases}$$

also:

$$(31) \quad \chi(t, x, w, p_0) \equiv w,$$

d. h.:

$$(32) \quad w' = w.$$

Für  $p = p_0 + \delta p$  wird:

$$(33) \quad w' = w + \delta w$$

und man bekommt für die infinitesimale Transformation von  $w$ :

$$(34) \quad \delta w = [\xi'_1 + (\xi'_2 - \tau'_1)w - \tau'_2 w^2] \delta p$$

oder kürzer:

$$(35) \quad \delta w = \eta(t, x, w) \cdot \delta p.$$

Die Gleichungen (6) und (28) zusammen stellen wieder eine eingliedrige Gruppe  $\mathcal{G}_1$  von Transformationen dar, welche die Veränderlichen  $t, x, w$  in  $t', x', w'$  überführen. Diese Gruppe  $\mathcal{G}_1$  heißt die *erste erweiterte Gruppe*; ihre infinitesimale Transformation ist durch die Gleichungen (21) und (34) gegeben und aus derselben findet man die endlichen Gleichungen (6) und (28) der Gruppe durch Integration des simultanen Systems:

$$(36) \quad \frac{dt'}{\tau(t', x')} = \frac{dx'}{\xi(t', x')} = \frac{dw'}{\eta(t', x', w')} = dp$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$(37) \quad t' = t, \quad x' = x, \quad w' = w \quad \text{für } p = p_0.$$

## II.

7. Wir wählen nun ein Koordinatensystem  $S$ , bestehend aus einer festen Geraden, der  $x$ -Achse, und einem festen Punkt  $O$ , dem Ursprung, auf derselben. Auf der  $x$ -Achse denken wir uns einen festen Maßstab mit dem Nullpunkte  $O$  und in jedem Punkt des Maßstabes eine Uhr angebracht.

Betrachten wir dann die *Bewegung* eines materiellen Punktes  $M$  längs der  $x$ -Achse, so entspricht jeder Lage desselben ein bestimmtes Wertepaar  $t, x$ , nämlich eine bestimmte *Zeigerstellung* derjenigen Uhr, welche zu dem Punkte der  $x$ -Achse gehört, mit welchem  $M$  zusammenfällt, und ein bestimmter *Teilstrich* des Maßstabes. Jede bestimmte Bewegung wird durch eine bestimmte Gleichung (25) dargestellt und die *Geschwindigkeit*  $w$  ist dann durch die erste der Gleichungen (27) gegeben.

Deuten wir die Größen  $t, x$  als Koordinaten eines Punktes  $P$  der  $t, x$ -Ebene, so entspricht jeder Lage von  $M$  ein bestimmter Punkt  $P$ , welcher der zu dieser Lage gehörige *Raumzeitpunkt* heißt;  $t, x$  nennen wir die im System  $S$  gemessenen *Raumzeitkoordinaten*. Die ganze Bewegung von  $M$  wird dargestellt durch eine kontinuierliche Folge von Raumzeitpunkten, d. h. durch eine Kurve  $\Gamma$ , deren Gleichung (25) ist und welche die zu dieser Bewegung gehörige *Zeitwegkurve* heißt. Die Geschwindigkeit  $w$  im Zeitpunkte  $t$  ist gleich dem Richtungskoeffizienten der Tangente der Zeitwegkurve im Raumzeitpunkte  $P$ . Die

einer gleichförmigen Bewegung von  $M$  entsprechende Zeitwegkurve ist eine Gerade.

8. Neben dem System  $S$  betrachten wir auf derselben Geraden noch eine einfach-unendliche Schar von anderen Systemen  $S'$  (d. h. von anderen Längen- und Zeitmessungen), deren jedes einem bestimmten Werte eines Parameters  $p$  in der Weise zugeordnet ist, daß verschiedenen Werten von  $p$  verschiedene Systeme  $S'$  entsprechen. Ein beliebiger Raumzeitpunkt  $P$ , der im System  $S$  die Raumzeitkoordinaten  $t, x$  besitzt, soll dann auch in jedem der Systeme  $S'$  bestimmte Raumzeitkoordinaten  $t', x'$  besitzen, welche nur von  $t, x$  und  $p$  abhängen, d. h. die Raumzeitkoordinaten  $t, x$  und  $t', x'$  von  $P$  in bezug auf  $S$  und  $S'$  sollen durch Gleichungen von der Form (6) zusammenhängen. Die Größen  $t', x'$  heißen die *im Systeme  $S'$  gemessenen Raumzeitkoordinaten* von  $P$ . Den unendlich vielen Werten von  $p$  entsprechend sind also jedem Raumzeitpunkte unendlich viele Wertepaare  $t', x'$  zugeordnet, welche aus  $t, x$  durch eine eingliedrige Schar  $\mathfrak{S}$  von Transformationen (6) hervorgehen.<sup>1)</sup>

Wenn wir zwei Transformationen der Schar  $\mathfrak{S}$  nacheinander ausführen, indem wir durch die Transformationsgleichungen (6) von dem Systeme  $S$  zu einem zweiten Systeme  $S'$  und von diesem wieder durch die Gleichungen (7) zu einem dritten Systeme  $S''$  übergehen, so soll das Produkt beider Transformationen, d. h. die Transformation (8), welche direkt den Übergang von  $S$  zu  $S''$  vermittelt, ebenfalls der Schar  $\mathfrak{S}$  angehören, d. h. die Schar  $\mathfrak{S}$  soll die *Gruppeneigenschaft* besitzen.

Ferner nehmen wir an, daß unter den Systemen  $S'$  auch das ursprüngliche System  $S$  selbst vorkommt; ist dann demselben der Parameterwert  $p_0$  zugeordnet, so müssen die Gleichungen (6) für  $p = p_0$  in die Gleichungen (15) übergehen, d. h. die Schar  $\mathfrak{S}$  muß die *identische Transformation* enthalten.

Schließlich setzen wir voraus, daß es in der Schar  $\mathfrak{S}$  zu jeder Transformation die *inverse* gibt, also zu jedem Parameter-

1) Der Schluß des Abschnittes II von hier an ist zum Verständnis des Gedankenganges der Arbeit nicht notwendig und dient nur dazu, unsere Forderung A. plausibel zu machen.



wert  $p$  einen zweiten  $\bar{p}$  von der Art, daß  $p$  und  $\bar{p}$  der Gleichung (18) genügen. Dann bilden die Transformationen der Schar  $\mathfrak{S}$  eine eingliedrige Gruppe  $\mathfrak{G}$  und wir können die obigen drei Annahmen in eine zusammenfassen, indem wir voraussetzen:

Die Transformationen (6), welche den Übergang von den im ursprünglichen Systeme  $S$  gemessenen Raumzeitkoordinaten  $t, x$  zu den in einem Systeme  $S'$  gemessenen Raumzeitkoordinaten  $t', x'$  vermitteln, bilden eine eingliedrige Gruppe mit dem Parameter  $p$ .

9. Um die Gruppe  $\mathfrak{G}$  näher zu bestimmen, machen wir nun weiter folgende Annahmen:

A. Jede Bewegung eines materiellen Punktes  $M$ , welche in bezug auf das ruhende System  $S$  eine gleichförmige ist, soll auch in bezug auf jedes der bewegten Systeme  $S'$  eine gleichförmige sein. Wenn also die Zeitwegkurve  $\Gamma$  einer Bewegung von  $M$  in bezug auf  $S$  eine Gerade ist, so muß auch die Zeitwegkurve  $\Gamma'$  derselben Bewegung in bezug auf  $S'$  eine Gerade sein, d. h. die Transformationen der Gruppe  $\mathfrak{G}$  müssen so beschaffen sein, daß sie Gerade wieder in Gerade überführen. Die einzigen Transformationen dieser Art sind aber die projektiven<sup>1)</sup>, d. h. diejenigen, deren Gleichungen (6) die folgende spezielle Form haben:

$$(38) \quad \begin{cases} t' = \frac{a_{11}(p)t + a_{12}(p)x + a_{13}(p)}{a_{21}(p)t + a_{22}(p)x + a_{23}(p)}, \\ x' = \frac{a_{31}(p)t + a_{32}(p)x + a_{33}(p)}{a_{21}(p)t + a_{22}(p)x + a_{23}(p)}. \end{cases}$$

Die Gruppe  $\mathfrak{G}$  wird dann als eingliedrige projektive Gruppe bezeichnet.

B. Jeder Raumzeitpunkt, der in bezug auf das System  $S$  endliche Koordinaten  $t, x$  hat, soll auch in bezug auf jedes System  $S'$  endliche Koordinaten  $t', x'$  haben. Daraus folgt<sup>2)</sup>, daß in den Gleichungen (38):

$$(39) \quad a_{31}(p) \equiv 0, \quad a_{32}(p) \equiv 0$$

sein muß, wodurch dieselben, wenn wir:

$$(40) \quad \frac{a_{i1}(p)}{a_{21}(p)} \quad (i = 1, 2; k = 1, 2, 3)$$

1) S. Lie u. G. Scheffers, l. c. p. 32. Theorem 2.

2) l. c. p. 57 u. 58. Satz 11.

wieder mit  $a_{ik}(p)$  bezeichnen, die Form:

$$(41) \quad \begin{cases} t' = a_{11}(p)t + a_{12}(p)x + a_{13}(p), \\ x' = a_{21}(p)t + a_{22}(p)x + a_{23}(p) \end{cases}$$

annehmen. Die Transformationen (41) lassen die unendlich ferne Gerade der  $t, x$ -Ebene invariant und werden als *affine* bezeichnet; die Gruppe  $\mathcal{G}$  heißt dann *affin* oder *allgemein linear*.

C. Schließlich soll der *Nullpunkt* der Raumzeitmessung in allen Systemen derselbe sein, d. h. aus:

$$t = 0, \quad x = 0$$

soll immer:

$$t' = 0, \quad x' = 0$$

folgen. Dann muß:

$$(42) \quad a_{13}(p) \equiv 0, \quad a_{23}(p) \equiv 0$$

sein, so daß die Gleichungen (41) in die folgenden:

$$(43) \quad t' = a_{11}(p)t + a_{12}(p)x, \quad x' = a_{21}(p)t + a_{22}(p)x$$

übergehen. Nunmehr sind also  $t', x'$  lineare homogene Funktionen von  $t, x$  mit Koeffizienten, die bloß Funktionen des Parameters  $p$  sind. Die Gruppe  $\mathcal{G}$  wird nun als eine *eingliedrige lineare homogene Gruppe* bezeichnet und ihre Transformationen lassen die unendlich ferne Gerade der  $t, x$ -Ebene und überdies den Nullpunkt derselben invariant.<sup>1)</sup>

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß die Koeffizienten  $a_{ik}(p)$  nicht beliebig gewählt werden dürfen, sondern gewissen Bedingungen unterliegen, wenn die Transformationen eine Gruppe bilden sollen. Die Bestimmung der Gestalt dieser Koeffizienten wird uns im folgenden beschäftigen.

### III.

10. Alle Voraussetzungen, welche wir über die Transformationen (6) gemacht haben, können wir nunmehr folgendermaßen zusammenfassen:

*Die Transformationen (6), welche den Zusammenhang zwischen den Raumzeitkoordinaten in bezug auf das ursprüngliche System  $S$  und ein System  $S'$  darstellen, bilden eine eingliedrige lineare homogene Gruppe mit dem Parameter  $p$ .*

1) S. Lie u. G. Scheffers, l. c. p. 134.

Damit die Gleichungen (43) für den Parameterwert  $p = p_0$  in die Gleichungen (15), welche die identische Transformation darstellen, übergehen, muß:

$$(44) \quad \begin{cases} a_{11}(p_0) = 1, & a_{12}(p_0) = 0, \\ a_{21}(p_0) = 0, & a_{22}(p_0) = 1 \end{cases}$$

sein. Für den Parameterwert  $p = p_0 + \delta p$  bekommen wir daher die Koeffizienten:

$$(45) \quad \begin{cases} a_{11}(p_0 + \delta p) = 1 + a_{11}'(p_0) \delta p, \\ a_{21}(p_0 + \delta p) = a_{21}'(p_0) \delta p, \\ a_{12}(p_0 + \delta p) = a_{12}'(p_0) \delta p, \\ a_{22}(p_0 + \delta p) = 1 + a_{22}'(p_0) \delta p, \end{cases}$$

und daraus folgen, wenn wir noch:

$$(46) \quad \begin{cases} a_{11}'(p_0) = \alpha_{11}, & a_{12}'(p_0) = \alpha_{12}, \\ a_{21}'(p_0) = \alpha_{21}, & a_{22}'(p_0) = \alpha_{22} \end{cases}$$

setzen, die Gleichungen für die infinitesimale Transformation [vgl. Nr. 5, Gleichung (19), (20), (21) und (22)] in der Form:

$$(47) \quad \delta t = (\alpha_{11} t + \alpha_{12} x) \delta p, \quad \delta x = (\alpha_{21} t + \alpha_{22} x) \delta p,$$

so daß für die lineare homogene Gruppe (43):

$$(48) \quad \tau(t, x) \equiv \alpha_{11} t + \alpha_{12} x, \quad \xi(t, x) \equiv \alpha_{21} t + \alpha_{22} x$$

ist. Die Koeffizienten  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$  können beliebig gewählt werden, aber nur ihre Verhältnisse sind wesentlich; es gibt also  $\infty^3$  infinitesimale Transformationen (47), und jede derselben erzeugt eine bestimmte eingliedrige lineare homogene Gruppe (43).

11. Betrachten wir nun eine bestimmte Transformation von  $\mathcal{G}$ , d. h. erteilen wir dem Parameter  $p$  irgend einen festen Wert, so erhalten wir durch Differentiation der Gleichungen (43) die Gleichungen:

$$(49) \quad dt' = a_{11}(p).dt + a_{12}(p).dx, \quad dx' = a_{21}(p).dt + a_{22}(p).dx,$$

aus denen hervorgeht, daß sich die Differentiale  $dt, dx$  ebenso transformieren wie die endlichen Größen  $t, x$ , daß also die beiden Größenpaare  $t, x$  und  $dt, dx$  *kogrediente* Transformationen (43) und (49) erleiden.

Aus den Gleichungen (49) folgt:

$$(50) \quad \frac{dx'}{dt'} = \frac{a_{21}(p) \cdot dt + a_{22}(p) \cdot dx}{a_{11}(p) \cdot dt + a_{12}(p) \cdot dx}$$

und somit wegen (27):

$$(51) \quad w' = \frac{a_{21}(p) + a_{22}(p) \cdot w}{a_{11}(p) + a_{12}(p) \cdot w}.$$

Diese Gleichung, welche die Transformation der Geschwindigkeit  $w$  in  $w'$  angibt, tritt jetzt an Stelle der Gleichung (28) und stellt mit den Gleichungen (43) die erste erweiterte Gruppe  $\mathcal{G}_1$  dar. Von besonderer Wichtigkeit ist der Umstand, daß im Falle der linearen Gruppe  $w'$  bloß eine Funktion von  $w$  und  $p$  ist, dagegen von  $t$  und  $x$  nicht abhängt.

Die infinitesimale Transformation der Geschwindigkeit  $w$  bekommen wir schließlich nach (34) und (48) in der Form:

$$(52) \quad \delta w = -[\alpha_{21} + (\alpha_{11} - \alpha_{22})w + \alpha_{12}w^2] \delta p,$$

woraus zu entnehmen ist, daß die Funktion  $\eta(t, x, w)$  in (35) nunmehr die Größen  $t$  und  $x$  nicht enthält. Durch diese infinitesimale Transformation wird die Geschwindigkeit  $w$  nach (33) in  $w' = w + \delta w$  übergeführt und bleibt somit dann und nur dann ungeändert, wenn:

$$(53) \quad \delta w = 0$$

ist. Dies tritt für jene Geschwindigkeiten ein, welche Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(54) \quad -\alpha_{21} + (\alpha_{11} - \alpha_{22})w + \alpha_{12}w^2 = 0$$

sind; dieselben bleiben bei der infinitesimalen Transformation und daher auch, wie wir übrigens noch direkt zeigen werden (am Schlusse von Nr. 12), bei jeder endlichen Transformation der Gruppe  $\mathcal{G}$  ungeändert. Wir nennen sie im folgenden die *ausgezeichneten* Geschwindigkeiten und setzen voraus:

*Die Geschwindigkeit  $w = 0$  (d. i. diejenige im Falle der Ruhe) soll keine ausgezeichnete Geschwindigkeit sein,*  
woraus folgt, daß:

$$(55) \quad \alpha_{21} \neq 0$$

sein muß.

Durch die Voraussetzung (55) ist zunächst der Fall:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22}, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0,$$

in welchem die Gleichung (54) identisch erfüllt und somit jede Geschwindigkeit  $w$  eine ausgezeichnete wäre, ausgeschlossen. In jedem anderen Falle haben wir aber nur zwei ausgezeichnete Geschwindigkeiten, die wir mit  $c_1$  und  $c_2$  bezeichnen wollen, nämlich:

$$(56) \quad c_1 = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{11} + \sqrt{\theta}}{2 \alpha_{12}}, \quad c_2 = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{11} - \sqrt{\theta}}{2 \alpha_{12}},$$

wobei:

$$(57) \quad \theta = (\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4 \alpha_{12} \alpha_{21}$$

ist. Die symmetrischen Grundfunktionen der Wurzeln  $c_1$  und  $c_2$  sind:

$$(58) \quad c_1 + c_2 = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{11}}{\alpha_{12}}, \quad c_1 c_2 = -\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{12}},$$

und mittels dieser Beziehungen kann man die infinitesimale Transformation (52) leicht auf die Form:

$$(59) \quad \delta w = \alpha_{21} \left(1 - \frac{w}{c_1}\right) \left(1 - \frac{w}{c_2}\right) \delta p$$

bringen, in welcher die Bedeutung von  $c_1$  und  $c_2$  als ausgezeichnete Geschwindigkeiten direkt ersichtlich ist.

#### IV.

12. Um nun die endlichen Gleichungen (43) und (51) der erweiterten Gruppe  $\mathfrak{G}_1$ , welche durch ihre infinitesimale Transformation (47) und (52) erzeugt wird, zu finden, hätten wir nach Nr. 6 (36) das simultane System:

$$(60) \quad \frac{dt'}{\alpha_{11} t' + \alpha_{12} x'} = \frac{dx'}{\alpha_{21} t' + \alpha_{22} x'} = \frac{dw'}{-[-\alpha_{21} + (\alpha_{11} - \alpha_{22})w' + \alpha_{12} w'^2]} = dp$$

mit den Anfangsbedingungen (37) zu integrieren. Wir wollen indessen auf diesem Wege nur die Gleichung (51) für die Transformation der Geschwindigkeit  $w$  bestimmen, indem wir von dem Umstande Gebrauch machen, daß  $w'$  nur von  $w$  und  $p$ , nicht aber von  $t$  und  $x$  abhängt, so daß wir die in dem System (60) enthaltene Gleichung:

$$(61) \quad \frac{dw'}{-[-\alpha_{21} + (\alpha_{11} - \alpha_{22})w' + \alpha_{12} w'^2]} = dp$$

mit der Anfangsbedingung:

$$(62) \quad w' = w \text{ für } p = p_0$$

losgelöst von demselben direkt integrieren können. Wir bekommen zunächst:

$$(63) \quad \int_w^{w'} \frac{dw'}{-[\alpha_{21} + (\alpha_{11} - \alpha_{22})w' + \alpha_{12}w^2]} = \int_{p_0}^p dp,$$

und daher, wenn wir die Integrale auswerten und beachten, daß die beiden ausgezeichneten Geschwindigkeiten  $c_1$  und  $c_2$  die beiden Nullstellen des Nenners im ersten Integral von (63) sind:

$$(64) \quad \frac{1}{\sqrt{\theta}} \log \text{nat}(c_1, c_2, w, w') = p - p_0,$$

wobei unter  $(c_1, c_2, w, w')$  das *Doppelverhältnis* der vier Werte  $c_1, c_2, w, w'$ , d. h. der Ausdruck:

$$(65) \quad (c_1, c_2, w, w') = \frac{(c_1 - w)(c_2 - w')}{(c_2 - w)(c_1 - w')}$$

verstanden ist. Aus (64) folgt schließlich:

$$(66) \quad (c_1, c_2, w, w') = e^{\sqrt{\theta} \cdot (p - p_0)}$$

und daraus findet man durch Auflösen nach  $w'$ :

$$(67) \quad w' = \frac{c_1 c_2 [1 - e^{\sqrt{\theta}(p - p_0)}] - [c_2 - c_1 e^{\sqrt{\theta}(p - p_0)}] \cdot w}{[c_1 - c_2 e^{\sqrt{\theta}(p - p_0)}] - [1 - e^{\sqrt{\theta}(p - p_0)}] \cdot w},$$

womit die endliche Gleichung für die Transformation der Geschwindigkeit [vgl. (28) und (51)] gefunden ist. In (67) können  $c_1$  und  $c_2$  noch durch ihre Werte (56) ersetzt werden.<sup>1)</sup>

Aus der Gleichung (67) ist endlich auch zu ersehen, daß die beiden ausgezeichneten Geschwindigkeiten  $c_1$  und  $c_2$  tatsächlich bei jeder endlichen Transformation der Gruppe ungeändert bleiben, also in bezug auf jedes System  $S'$  dieselben Werte haben, denn setzt man:

$$w = \begin{cases} c_1 \\ c_2 \end{cases},$$

so folgt:

$$w' = \begin{cases} c_1 \\ c_2 \end{cases} = w$$

für jeden Wert des Parameters  $p$  (vgl. Nr. 11).

1) Man beachte, daß die Gleichungen (64), (66) und (67) von dem Vorzeichen, welches der Größe  $\sqrt{\theta}$  beigelegt wird, unabhängig sind. Ersetzt man nämlich  $\sqrt{\theta}$  durch  $-\sqrt{\theta}$ , so werden nach (56) gleichzeitig die beiden ausgezeichneten Geschwindigkeiten  $c_1$  und  $c_2$  untereinander vertauscht und die Gleichungen bleiben ungeändert.



13. Die Systeme  $S'$ , die wir in II., Nr. 8 eingeführt haben, wollen wir nun als solche betrachten, welche sich in bezug auf das ursprüngliche System  $S$ , das wir als *ruhend* bezeichnen, mit verschiedenen *konstanten Geschwindigkeiten*  $q$  bewegen. Dann ist jedem System  $S'$  sowohl ein bestimmter Parameterwert  $p$ , als auch eine bestimmte Geschwindigkeit  $q$  zugeordnet, woraus folgt, daß zwischen  $p$  und  $q$  eine Relation bestehen muß, welcher wir die Form:

$$(68) \quad p = F(q)$$

geben können, so daß der Parameter  $p$  als Funktion der Geschwindigkeit  $q$  erscheint.

Führen wir in den Gleichungen (43) und (51) mittels der Gleichung (68) statt des Parameters  $p$  die Geschwindigkeit  $q$  ein, so wird an der Gruppe  $\mathcal{G}_1$  nichts Wesentliches geändert;  $q$  kann dann als neuer Parameter der Gruppe betrachtet werden.

Um die Geschwindigkeit  $q$  zu definieren und damit auch die Gestalt der Funktion  $F(q)$  zu bestimmen, stellen wir die folgende Forderung auf:

*Wenn sich ein materieller Punkt  $M$  in bezug auf das ruhende System  $S$  mit der Geschwindigkeit  $w = q$  bewegt, so soll er in bezug auf ein mit der Geschwindigkeit  $q$  gegen  $S$  gleichförmig bewegtes System  $S'$  die Geschwindigkeit  $w' = 0$  haben.*

Diese Forderung besagt, daß das Wertepaar:

$$(69) \quad w = q, \quad w' = 0$$

der Gleichung (64) genügen soll, so daß also:

$$(70) \quad p - p_0 = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \log \text{nat}(c_1, c_2, q, 0)$$

ist. Daraus finden wir für die gesuchte Funktion  $F(q)$ :

$$(71) \quad p = F(q) = p_0 + \frac{1}{\sqrt{\theta}} \log \text{nat} \frac{c_2 (c_1 - q)}{c_1 (c_2 - q)}$$

und erhalten durch Einsetzen dieses Ausdruckes in (67) die Transformationsgleichung für die Geschwindigkeit  $w$  in der Form:

$$(72) \quad w' = \frac{c_1 c_2 (w - q)}{c_1 c_2 - (c_1 + c_2) q + q w},$$

oder schließlich nach (58):

$$(73) \quad w' = \frac{-\alpha_{21}(w - q)}{-\alpha_{21} + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q + \alpha_{12}q w}.$$

Ferner folgt aus (71), daß dem Parameterwert  $p_0$  der identischen Transformation der Wert Null der Geschwindigkeit  $q$  entspricht, daß also das ruhende System  $S$  als dasjenige unter den Systemen  $S'$  zu betrachten ist, welches sich mit der Geschwindigkeit  $q = 0$  bewegt.

14. Betrachten wir von nun an die Geschwindigkeit  $q$  als den Parameter unserer Gruppe und setzen wir:

$$(74) \quad a_{ik}(F(q)) \equiv b_{ik}(q), \quad (i, k = 1, 2),$$

so erhalten wir an Stelle von (43) und (51) die Gleichungen:

$$(43a) \quad t' = b_{11}(q) \cdot t + b_{12}(q) \cdot x, \quad x' = b_{21}(q) \cdot t + b_{22}(q) \cdot x$$

und:

$$(51a) \quad w' = \frac{b_{21}(q) + b_{22}(q) \cdot w}{b_{11}(q) + b_{12}(q) \cdot w},$$

welche jetzt die Gruppe  $\mathfrak{G}_1$  definieren. Setzt man in der Gleichung (51a)  $w = q$ , so muß  $w' = 0$  werden, und zwar für jeden Wert von  $q$ , woraus die Identität:

$$(75) \quad b_{21}(q) + q \cdot b_{22}(q) \equiv 0$$

folgt.

Legen wir nunmehr die neuen Gleichungen (43a) und (51a) für die Gruppe  $\mathfrak{G}_1$  zugrunde, so liefert der Wert  $q = 0$  die *identische* und daher der Wert  $q = \delta q$  ihre *infinitesimale* Transformation. Dieselbe dürfen wir auch jetzt noch als durch die Gleichungen (47) gegeben ansehen, denn durch Einführung des neuen Parameters  $q$  können zwar die Werte der Koeffizienten  $\alpha_{ik}$  selbst, nicht aber deren Verhältnisse — und nur diese sind ja wesentlich — geändert werden.

Durch unsere *Normierung* des Parameters der Gruppe erhalten jetzt auch die Koeffizienten  $\alpha_{ik}$  selbst bestimmte Werte, während bisher nur ihre Verhältnisse bestimmt waren. In der Tat ist ja nach (45) und (46):

$$b_{21}(\delta q) = \alpha_{21} \delta q, \quad b_{22}(\delta q) = 1 + \alpha_{22} \delta q,$$

und daher bekommen wir, wenn wir in der Identität (75)

$q = \delta q$  setzen und Glieder, die in  $\delta q$  von zweiter Ordnung sind, weglassen:

$$(\alpha_{21} + 1) \delta q = 0,$$

d. h.:

$$(76) \quad \alpha_{21} = -1,$$

da  $\delta q \neq 0$  ist. Dadurch ist also der Koeffizient  $\alpha_{21}$ , der bisher nur an die Ungleichung (55) gebunden war, genau bestimmt.

Nach (44) und (46) bekommen wir ferner für die neuen Koeffizienten  $b_{ik}(q)$  in (43a) und (51a) die Gleichungen:

$$(44a) \quad \begin{cases} b_{11}(0) = 1, & b_{12}(0) = 0, \\ b_{21}(0) = 0, & b_{22}(0) = 1 \end{cases}$$

und:

$$(46a) \quad \begin{cases} b_{11}'(0) = \alpha_{11}, & b_{12}'(0) = \alpha_{12}, \\ b_{21}'(0) = -1, & b_{22}'(0) = \alpha_{22}. \end{cases}$$

Setzen wir endlich den Wert (76) in die Gleichungen (47) und (52) ein, so erhalten wir für die infinitesimale Transformation der Gruppe  $\mathcal{G}$ :

$$(47a) \quad \delta t = (\alpha_{11} t + \alpha_{12} x) \delta q, \quad \delta x = (-t + \alpha_{22} x) \delta q$$

und für die infinitesimale Transformation der Geschwindigkeit  $w$ :

$$(52a) \quad \delta w = -[1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})w + \alpha_{12}w^2] \delta q,$$

oder nach (59):

$$(59a) \quad \delta w = -\left(1 - \frac{w}{c_1}\right)\left(1 - \frac{w}{c_2}\right) \delta q.$$

Die endliche Gleichung (73) für die Transformation der Geschwindigkeit  $w$  geht über in:

$$(73a) \quad w' = \frac{w - q}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q + \alpha_{12}qw}$$

und aus (57) wird schließlich:

$$(57a) \quad \theta = (\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 - 4\alpha_{12}.$$

15. Setzen wir die Transformation (73a), die zum Parameterwert  $q$  gehört und  $w$  in  $w'$  überführt, mit einer zweiten Transformation derselben Art:

$$(77) \quad w'' = \frac{w' - q'}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q' + \alpha_{12}q'w'},$$

welche zu einem Parameterwert  $q'$  gehört und  $w'$  in  $w''$  überführt, zusammen, so folgt aus der Gruppeneigenschaft unserer Transformationen, daß die resultierende Transformation, welche  $w$  direkt in  $w''$  überführt, die Form:

$$(78) \quad w'' = \frac{w - q'}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q' + \alpha_{12}q'w}$$

haben muß, wobei der Parameterwert  $q''$  nach (13) eine Funktion von  $q$  und  $q'$  ist.

Um diese Funktion in unserem Falle zu bestimmen, brauchen wir nur die Zusammensetzung der beiden Transformationen (73a) und (77) wirklich auszuführen. Wir bekommen dann:

$$(79) \quad \left\{ \begin{aligned} w'' &= \frac{\frac{w - q}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q + \alpha_{12}qw} - q'}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q' + \frac{\alpha_{12}q'(w - q)}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q + \alpha_{12}qw}} \\ &= \frac{w - \frac{q + q' + (\alpha_{11} - \alpha_{22})qq'}{1 - \alpha_{12}qq'}}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\frac{q + q' + (\alpha_{11} - \alpha_{22})qq'}{1 - \alpha_{12}qq'} + \alpha_{12}\frac{q + q' + (\alpha_{11} - \alpha_{22})qq'}{1 - \alpha_{12}qq'}w} \end{aligned} \right.$$

und daraus folgt durch Vergleichung mit (78):

$$(80) \quad q'' = \frac{q + q' + (\alpha_{11} - \alpha_{22})qq'}{1 - \alpha_{12}qq'}.$$

Diese Gleichung, durch welche nunmehr die *Parametergruppe*  $\mathfrak{P}$  unserer Gruppe  $\mathfrak{G}$  (und  $\mathfrak{G}_1$ ) gegeben ist<sup>1)</sup>, drückt das *Additionstheorem der Geschwindigkeiten*  $q$  aus, indem  $q''$  die auf das ruhende System  $S$  bezogene Geschwindigkeit eines Systems  $S''$  bedeutet, welches sich mit der Geschwindigkeit  $q'$  in bezug auf ein System  $S'$  bewegt, welches selbst wieder in bezug auf das ruhende System  $S$  die Geschwindigkeit  $q$  besitzt.

Soll schließlich die Gleichung (77) die *inverse* Transformation von (73a) darstellen, also:

$$w'' = w$$

1) Behält man den ursprünglichen Parameter  $p$  der Gruppe bei, wie er z. B. in (67) vorkommt, so lautet die Gleichung (13) der Parametergruppe:

$$p'' = p + p' - p_0.$$

sein, so muß die resultierende Transformation (78) die identische und daher  $q'' = 0$  sein. Dann folgt aber aus (80), wenn wir den Parameterwert der inversen Transformation von (73a) mit  $\bar{q}$  bezeichnen:

$$(81) \quad q + \bar{q} + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q \bar{q} = 0$$

und somit:

$$(82) \quad \bar{q} = \frac{-q}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q}.$$

Setzt man diesen Wert an Stelle von  $q'$  in (77) ein, so bekommt man für die inverse Transformation von (73a) die Gleichung:

$$(83) \quad w = \frac{q + w' + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q w'}{1 - \alpha_{12} q w'},$$

die man auch direkt durch Auflösen von (73a) nach  $w$  erhalten kann.

Die Formel (83) zeigt, daß  $w$  aus  $q$  und  $w'$  in genau derselben Weise gefunden wird wie  $q''$  aus  $q$  und  $q'$  — eine Analogie, die sich ohne weiteres aus der kinematischen Bedeutung der beiden Gleichungen (80) und (83) erklärt.

## V.

16. Ehe wir die endlichen Gleichungen (43a) der Gruppe  $\mathcal{G}$  im allgemeinen Falle aufstellen, wollen wir als Beispiele zu den bisherigen Entwicklungen die beiden anfangs genannten speziellen eingliedrigen linearen homogenen Gruppen (2) und (1) der Galilei- und der Lorentztransformationen näher betrachten.

Die Koeffizienten  $b_{ik}(q)$  der Gruppe (2) der Galileitransformationen sind:

$$(84) \quad \begin{cases} b_{11}(q) \equiv 1, & b_{12}(q) \equiv 0, \\ b_{21}(q) \equiv -q, & b_{22}(q) \equiv 1; \end{cases}$$

daraus bekommen wir für  $q = 0$ :

$$(44b) \quad \begin{cases} b_{11}(0) = 1, & b_{12}(0) = 0, \\ b_{21}(0) = 0, & b_{22}(0) = 1, \end{cases}$$

in Übereinstimmung mit den Gleichungen (44a). Ferner folgt aus (84):

$$(85) \quad \begin{cases} b_{11}'(q) \equiv 0, & b_{12}'(q) \equiv 0, \\ b_{21}'(q) \equiv -1, & b_{22}'(q) \equiv 0, \end{cases}$$

und daher nach (46a):

$$(46b) \quad \begin{cases} \alpha_{11} = b_{11}'(0) = 0, & \alpha_{12} = b_{12}'(0) = 0, \\ \alpha_{21} = b_{21}'(0) = -1, & \alpha_{22} = b_{22}'(0) = 0, \end{cases}$$

so daß die Gleichung (76) erfüllt ist. Für die infinitesimale Transformation (47a) und (52a) ergibt sich somit:

$$(47b) \quad \delta t = 0, \quad \delta x = -t \delta q$$

und:

$$(52b) \quad \delta w = -\delta q;$$

endlich bekommen wir nach (57a):

$$(57b) \quad \theta = 0,$$

so daß die beiden ausgezeichneten Geschwindigkeiten  $c_1, c_2$  einander gleich werden, und zwar insbesondere:

$$(86) \quad c_1 = c_2 = \infty,$$

während die endliche Gleichung (73a) für die Transformation der Geschwindigkeit in:

$$(73b) \quad w' = w - q$$

übergeht.

Für die Gruppe (1) der *Lorentztransformationen* sind die Koeffizienten  $b_{ik}(q)$  durch:

$$(87) \quad \begin{cases} b_{11}(q) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, & b_{12}(q) = \frac{-\frac{q}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \\ b_{21}(q) = \frac{-q}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, & b_{22}(q) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \end{cases}$$

gegeben, woraus für  $q = 0$  wieder die Gleichungen (44a) entstehen. Für die Ableitungen  $b_{ik}'(q)$  dieser Koeffizienten finden wir:

$$(88) \quad \begin{cases} b_{11}'(q) = \frac{\frac{q}{c^2}}{\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{3/2}}, & b_{12}'(q) = \frac{-\frac{1}{c^2}}{\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{3/2}}, \\ b_{21}'(q) = \frac{-1}{\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{3/2}}, & b_{22}'(q) = \frac{\frac{q}{c^2}}{\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{3/2}}, \end{cases}$$



und daraus folgt nach (46a):

$$(46c) \quad \begin{cases} \alpha_{11} = b_{11}'(0) = 0, & \alpha_{12} = b_{12}'(0) = -\frac{1}{c^2}, \\ \alpha_{21} = b_{21}'(0) = -1, & \alpha_{22} = b_{22}'(0) = 0, \end{cases}$$

wobei wieder die Gleichung (76) erfüllt ist. Die Gleichungen (47a) und (52a) für die infinitesimale Transformation gehen nunmehr in:

$$(47c) \quad \delta t = -\frac{x}{c^2} \delta q, \quad \delta x = -t \delta q,$$

und:

$$(52c) \quad \delta w = -\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) \delta q$$

über, so daß wir für die beiden ausgezeichneten Geschwindigkeiten  $c_1, c_2$  die Werte:

$$(89) \quad c_1 = -c, \quad c_2 = +c$$

erhalten, während nach (57a):

$$(57c) \quad \theta = \frac{4}{c^2}$$

wird. Schließlich bekommen wir aus (73a) für die Transformation der Geschwindigkeit  $w$  die endliche Gleichung:

$$(73a) \quad w' = \frac{w - q}{1 - \frac{q}{c^2} w}.$$

## VI.

17. Nunmehr gehen wir an die Aufstellung der allgemeinen Gleichungen der eingliedrigen linearen homogenen Gruppe  $\mathfrak{G}$ , d. h. an die Bestimmung der Koeffizienten  $b_{ik}(q)$  in (43a).

Durch Vergleichung der beiden Gleichungen (51a) und (73a), die ja miteinander übereinstimmen müssen, folgt, daß die vier Koeffizienten:

$$(90) \quad \begin{cases} b_{11}(q), & b_{12}(q), \\ b_{21}(q), & b_{22}(q) \end{cases}$$

den vier Größen:

$$(91) \quad \begin{cases} 1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q, & \alpha_{12}q, \\ -q, & 1 \end{cases}$$

proportional sein müssen, wobei der noch zu bestimmende

Proportionalitätsfaktor nur eine Funktion von  $q$  allein sein kann, die wir mit  $\omega(q)$  bezeichnen wollen, so daß also:

$$(92) \quad \begin{cases} b_{11}(q) \equiv \omega(q) \cdot [1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q], & b_{12}(q) \equiv \omega(q) \cdot \alpha_{12}q, \\ b_{21}(q) \equiv \omega(q) \cdot (-q), & b_{22}(q) \equiv \omega(q) \end{cases}$$

ist, wodurch übrigens auch die Identität (75) erfüllt ist. Durch Einsetzen der Werte (92) in die Gleichungen (43a) bekommen wir dieselben in der Form:

$$(93) \quad \begin{cases} t' = \omega(q) \{ [1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q] t + \alpha_{12} q x \}, \\ x' = \omega(q) \{ -q t + x \}, \end{cases}$$

wo die Funktion  $\omega(q)$  noch unbekannt ist.

18. Mittels der Gleichungen (93) können wir die kinematische Bedeutung des Faktors  $\omega(q)$  angeben, noch ehe wir seine Gestalt bestimmt haben. Betrachten wir nämlich einen materiellen Punkt  $M$ , der sich auf der  $x$ -Achse mit einer konstanten Geschwindigkeit  $w$  in bezug auf das System  $S$  bewegt und sich zur Zeit  $t = 0$  an der Stelle  $x = a$  desselben befindet, so ist seine Bewegung in bezug auf  $S$  durch die Gleichung:

$$(94) \quad x = a + w t$$

gegeben. Um nun die Bewegungsgleichung von  $M$  in bezug auf ein gegen  $S$  mit der Geschwindigkeit  $q$  bewegtes System  $S'$  zu finden, lösen wir die Gleichungen (93) nach  $t$  und  $x$  auf, wodurch wir die Gleichungen:

$$(95) \quad \begin{cases} t = \frac{t' - \alpha_{12} q x'}{\omega(q) [1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q + \alpha_{12} q^2]}, \\ x = \frac{q t' + [1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q] x'}{\omega(q) [1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q + \alpha_{12} q^2]} \end{cases}$$

für die inverse Transformation von (92) finden, und setzen die gefundenen Ausdrücke (95) in (94) ein. Dadurch bekommen wir zunächst:

$$q t' + [1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q] x' = a [1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q + \alpha_{12} q^2] \omega(q) + w t' - \alpha_{12} q w x',$$

also, wenn wir diese Gleichung nach  $x$  auflösen:

$$(96) \quad \begin{cases} x' = a \frac{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q + \alpha_{12} q^2}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q + \alpha_{12} q w} \cdot \omega(q) \\ \quad + \frac{w - q}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q + \alpha_{12} q w} t', \end{cases}$$

oder:

(97)

$$x' = a' + w' t',$$

wenn:

(98)

$$a' = a \frac{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q^2}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q w} \cdot \omega(q)$$

den Wert von  $x'$  zur Zeit  $t' = 0$  und  $w'$  die durch (73a) gegebene Geschwindigkeit von  $M$  in bezug auf das System  $S'$  bedeutet.

Wir betrachten nun zwei materielle Punkte  $M_1$  und  $M_2$ , deren im ruhenden System  $S$  gemessene Raumzeitkoordinaten  $t_1, x_1$  und  $t_2, x_2$  sein mögen und welche sich mit derselben konstanten Geschwindigkeit  $w$  bewegen. Sind dann zur Zeit:

$$t_1 = t_2 = 0$$

die Lagen von  $M_1$  und  $M_2$  durch:

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2$$

gegeben, so lauten die Bewegungsgleichungen dieser beiden Punkte in bezug auf das System  $S$ :

(99)

$$x_1 = a_1 + w t_1, \quad x_2 = a_2 + w t_2,$$

während ihre Bewegungsgleichungen in bezug auf das mit der Geschwindigkeit  $q$  gegen  $S$  bewegte System  $S'$ :

(100)

$$x_1' = a_1' + w' t_1', \quad x_2' = a_2' + w' t_2'$$

sind, wobei  $t_1', x_1'$  und  $t_2', x_2'$  die im System  $S'$  gemessenen Raumzeitkoordinaten von  $M_1$  und  $M_2$  bedeuten, ferner nach (98):

(101)

$$\begin{cases} a_1' = a_1 \frac{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q^2}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q w} \cdot \omega(q), \\ a_2' = a_2 \frac{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q^2}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q w} \cdot \omega(q) \end{cases}$$

ist und die Geschwindigkeit  $w'$  der Punkte in bezug auf  $S'$  wieder durch (73a) gegeben ist.

Die beiden Punkte  $M_1$  und  $M_2$  können wir uns, da sie sich beide auf der  $x$ -Achse mit derselben Geschwindigkeit  $w$  bewegen, als die Endpunkte eines starren Stabes denken, dessen im System  $S$  gemessene Länge  $l$  wir als Entfernung zweier bezüglich  $S$  gleichzeitig eingenommenen Lagen von  $M_1$  und  $M_2$  erhalten, wenn wir in (99):

$$t_1 = t_2$$

setzen und die erste Gleichung von der zweiten subtrahieren:

$$(102) \quad l = x_2 - x_1 = a_2 - a_1.$$

Ebenso finden wir für die im System  $S'$  gemessene Länge  $l'$  des Stabes aus den Gleichungen (100), wenn wir in denselben:

$$t'_1 = t'_2$$

setzen, den Wert:

$$(103) \quad l' = x'_2 - x'_1 = a'_2 - a'_1,$$

also nach (101) und (102):

$$(104) \quad l' = \frac{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q + \alpha_{12}q^2}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q + \alpha_{12}qw} \cdot \omega(q) \cdot l.$$

Nehmen wir schließlich an, daß der Stab in bezug auf das System  $S'$  ruht, daß also  $w' = 0$  ist, so bewegt er sich nach (69) in bezug auf das System  $S$  mit der Geschwindigkeit  $w = q$ . Dann wird aus (104):

$$(105) \quad l' = \omega(q) \cdot l$$

und es folgt:

*Die Funktion  $\omega(q)$  bedeutet jenen Faktor, mit welchem man die im ruhenden System  $S$  gemessene Länge  $l$  eines mit der Geschwindigkeit  $w = q$  bezüglich  $S$  gleichförmig bewegten starren Stabes multiplizieren muß, um seine Länge  $l'$  in jenem System  $S'$  zu bekommen, in bezug auf welches er sich in Ruhe befindet.*

Der Faktor  $\omega(q)$  wird als *Kontraktion* bezeichnet.

19. Um schließlich die Gestalt der Funktion  $\omega(q)$  zu bestimmen, setzen wir die zum Parameterwert  $q$  gehörige Transformation (93), welche das Wertepaar  $t, x$  in  $t', x'$  überführt, mit einer zweiten Transformation der Gruppe  $\mathcal{G}$ :

$$(106) \quad \begin{cases} t'' = \omega(q') \{ [1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q'] t' + \alpha_{12}q' x' \}, \\ x'' = \omega(q') \{ -q' t' + x' \} \end{cases}$$

zusammen, die zum Parameterwert  $q'$  gehört und  $t', x'$  in  $t'', x''$  verwandelt. Aus der Gruppeneigenschaft der Transformationen (93) folgt dann, daß die resultierende Transformation, welche  $t, x$  direkt in  $t'', x''$  überführt, die Form:

$$(107) \quad \begin{cases} t'' = \omega(q'') \{ [1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q''] t + \alpha_{12}q'' x \}, \\ x'' = \omega(q'') \{ -q'' t + x \} \end{cases}$$

haben muß, wobei der Parameter  $q''$  durch die Gleichung (80) als Funktion von  $q$  und  $q'$  gegeben ist.

Führt man die Zusammensetzung der beiden Transformationen (93) und (106) wirklich aus, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung (80):

$$(108) \begin{cases} t'' = (1 - \alpha_{12} q q') \omega(q) \omega(q') \{ [1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q'] t + \alpha_{12} q'' x \}, \\ x'' = (1 - \alpha_{12} q q') \omega(q) \omega(q') \{ -q'' t + x' \}, \end{cases}$$

und daraus folgt durch Vergleichung mit (107):

$$(109) \quad \omega(q') = (1 - \alpha_{12} q q') \omega(q) \omega(q'),$$

also nach (80):

$$(110) \quad \omega \left( \frac{q + q' + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q q'}{1 - \alpha_{12} q q'} \right) = (1 - \alpha_{12} q q') \omega(q) \omega(q').$$

Dies ist eine *Funktionalgleichung*, mittels welcher sich die Funktion  $\omega(q)$  bestimmen läßt. Zu diesem Zwecke differenzieren wir (110) nach  $q'$  und setzen darauf  $q' = 0$ , wodurch wir bekommen:

$$(111) \quad \omega'(q) [1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q^2] = \omega(q) [\omega'(0) - \alpha_{12} \omega(0) q].$$

Nun ist aber nach der letzten Gleichung in (92):

$$\omega(q) \equiv b_{22}(q),$$

so daß wir für die Kontraktion  $\omega(q)$  nach (44a) und (46a) noch die Bedingungen:

$$(112) \quad \omega(0) = b_{22}(0) = 1$$

und:

$$(113) \quad \omega'(0) = b_{22}'(0) = \alpha_{22}$$

erhalten, mittels welcher sich für dieselbe aus (111) die *Differentialgleichung*:

$$(114) \quad \omega'(q) [1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q^2] = \omega(q) [\alpha_{22} - \alpha_{12} q]$$

mit der Anfangsbedingung (112) ergibt. Aus (114) folgt:

$$(115) \quad \frac{\omega'(q)}{\omega(q)} = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{12} q}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q^2}$$

und daher:

$$(116) \quad \int_0^q \frac{\omega'(q)}{\omega(q)} dq = \int_0^q \frac{\alpha_{22} - \alpha_{12} q}{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) q + \alpha_{12} q^2} dq.$$

Rechnet man die Integrale beiderseits aus und löst die entstehende Gleichung nach  $\omega(q)$  auf, so findet man schließlich für die Kontraktion den Ausdruck:

$$(117) \quad \omega(q) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})q + \alpha_{12}q^2}} \left[ \frac{1 + \frac{\alpha_{11} - \alpha_{22} + \sqrt{\theta}}{2}q}{1 + \frac{\alpha_{11} - \alpha_{22} - \sqrt{\theta}}{2}q} \right]^{\frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}}{2\sqrt{\theta}}}$$

der in der Tat auch die Bedingung (113) erfüllt.

Damit sind auch die endlichen Gleichungen (93) der allgemeinen eingliedrigen linearen homogenen Gruppe, welche durch die infinitesimale Transformation (47) unter der Voraussetzung (55) erzeugt wird, vollständig bestimmt.<sup>1)</sup>

20. Für die *Galileigruppe* findet man insbesondere nach (46 b):

$$(117a) \quad \omega(q) = 1$$

und für die *Lorentzgruppe* nach (46 c):

$$(117b) \quad \omega(q) = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_{12}q^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$$

in Übereinstimmung mit den Gleichungen (2) und (1).

## VII.

21. Wir gehen nun daran, die Forderung B. unserer Einleitung anzuwenden und untersuchen, welche der  $\infty^3$  Transformationsgruppen, die durch die Gleichungen (93) und (117) gegeben sind, eine Kontraktion  $\omega(q)$  ergeben, die eine gerade Funktion der Geschwindigkeit  $q$  ist, d. h. keine der beiden Richtungen der  $x$ -Achse auszeichnet.

Dafür ist sicher notwendig und hinreichend, daß die Differentialquotienten ungerader Ordnung der Funktion  $\omega(q)$  an der Stelle  $q = 0$  verschwinden; speziell muß:

$$(118) \quad \left(\frac{d\omega}{dq}\right)_{q=0} = \omega'(0) = 0, \quad \left(\frac{d^3\omega}{dq^3}\right)_{q=0} = \omega'''(0) = 0$$

sein. Wir berechnen also die Größen  $\omega(0)$ ,  $\omega'(0)$ ,  $\omega''(0)$ ,  $\omega'''(0)$ .

Die ersten beiden sind durch die Gleichungen (112) und (113) gegeben; die übrigen erhalten wir am einfachsten durch

1) Auch die Gleichung (117) wird durch eine Vorzeichenänderung von  $\sqrt{\theta}$  nicht beeinflusst. (Vgl. die Fußnote zu Nr. 12.)

wiederholtes Differenzieren der Gleichung (114); dieses ergibt, wenn wir zugleich  $q = 0$  setzen:

$$(119) \quad \omega''(0) + (\alpha_{11} - 2\alpha_{22})\omega'(0) + \alpha_{12}\omega(0) = 0,$$

$$(120) \quad \omega'''(0) + (2\alpha_{11} - 3\alpha_{22})\omega''(0) + 4\alpha_{12}\omega'(0) = 0.$$

Daraus folgt:

$$(121) \quad \omega''(0) = -\alpha_{12} - \alpha_{22}(\alpha_{11} - 2\alpha_{22}),$$

$$(122) \quad \omega'''(0) = 2\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{22}(2\alpha_{11}^2 - 7\alpha_{12} - 7\alpha_{11}\alpha_{22} + 6\alpha_{22}^2).$$

Aus der ersten der Gleichungen (118) in Verbindung mit Gleichung (113) folgt:

$$(123) \quad \alpha_{22} = 0$$

und in Verbindung mit (122):

$$(124) \quad \alpha_{11}\alpha_{12} = 0.$$

Die Gleichungen (123) und (124) müssen also notwendig erfüllt sein, wenn die Transformationsgleichungen eine Kontraktion ergeben sollen, die der Forderung B. genügt. Wir werden bald sehen, daß das Bestehen der Gleichungen (123) und (124) auch hinreichend dafür ist.

22. Es ergeben sich nämlich nach Gleichung (124) drei Unterfälle:

$$(125a) \quad 1. \alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{12} = 0,$$

$$(125b) \quad 2. \alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{12} \neq 0,$$

$$(125c) \quad 3. \alpha_{11} \neq 0, \quad \alpha_{12} = 0.$$

Jedem dieser Unterfälle entspricht ein bestimmter Typus von Transformationsgleichungen, die unseren Forderungen A. und B. genügen.

Der erste Unterfall ergibt, wie man aus Gleichung (93) in Verbindung mit (117) und (117a) sieht, die Gruppe der *Galileitransformationen*, der zweite Unterfall, wie aus den Gleichungen (93) in Verbindung mit Gleichung (117) und (117b) erhellt, die Gruppe der *Lorentztransformationen*.

23. Der dritte Unterfall aber führt auf eine bisher noch nicht behandelte Gruppe. Es folgt aus Gleichung (117) in Verbindung mit (123) und (125c):

$$(126) \quad \omega(q) = 1$$

und aus Gleichung (93):

$$(127) \quad \begin{cases} t' = (1 + \alpha_{11} q) t, \\ x' = -qt + x. \end{cases}$$

Die ausgezeichneten Geschwindigkeiten haben die Werte:

$$(128) \quad c_1 = -\frac{1}{\alpha_{11}}, \quad c_2 = \infty,$$

denn dies sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung (54), wenn die Koeffizienten derselben den Bedingungen (76), (123) und (125 c) genügen. Die Transformationsgleichungen (127) lassen sich dann in der Form:

$$(129) \quad \begin{cases} t' = \left(1 - \frac{q}{c_1}\right) t, \\ x' = -qt + x \end{cases}$$

schreiben.

Die durch diese Transformation dargestellte Uhrenregulierung läßt sich nun in ähnlicher Art physikalisch deuten, wie es Einstein<sup>1)</sup> für die *Lorentztransformation* getan hat.

Zur Zeit  $t = 0$  möge ein Lichtstrahl vom Ursprunge in der positiven Koordinatenrichtung ausgehen und sich mit der Geschwindigkeit  $c_1$  fortpflanzen. Wenn sich nun ein Körper mit der Geschwindigkeit  $q$  bewegt, so hat das Licht in bezug auf diesen Körper die Geschwindigkeit  $c_1 - q$  (in der Zeit des ruhenden Systems). Wenn wir nun wollen, daß die Geschwindigkeit des Lichtstrahles in bezug auf den bewegten Körper auch noch  $c_1$  ist, können wir das dadurch erreichen, daß wir die Ganggeschwindigkeit der Uhren im Verhältnis von  $c_1$  zu  $c_1 - q$  verändern; dadurch führen wir aber im bewegten Körper eine Zeit  $t'$  ein, die durch:

$$t' = \frac{c_1 - q}{c_1} t,$$

d. h. durch die erste der Gleichungen (129) gegeben ist. Diese Zeitregulierung entspricht dem *Dopplerschen Prinzip*; wir wollen daher die Gleichungen (129) kurz als die *Dopplertransformation* bezeichnen.

Die Dopplertransformation unterscheidet sich von der Lorentztransformation sehr wesentlich dadurch, daß in einem

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 891 ff. 1905.



mit der Geschwindigkeit  $q$  bewegten Körper an allen Stellen dieselbe Zeit herrscht; es gibt keine Ortszeit, und was noch wichtiger ist: wenn wir die Regulierung für in der Richtung der *positiven*  $x$ -Achse sich fortpflanzende Lichtstrahlen vorgenommen haben, die also jetzt in allen bewegten Körpern dieselbe Geschwindigkeit  $c_1$  besitzen (wir setzen hier  $c_1 > 0$  voraus), so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Lichtstrahlen, die sich in der *negativen*  $x$ -Richtung mit der Geschwindigkeit  $c_1$  in bezug auf das ruhende System fortpflanzen, darum noch nicht in bezug auf alle bewegten Körper die nämliche.

Denn wenn  $c_1$  eine ausgezeichnete Geschwindigkeit ist, so ist darum noch nicht  $-c_1$  auch eine. Laut Gleichung (128) wäre das nur für  $c_1 = \infty$ , also  $\alpha_{11} = 0$  der Fall; dann haben wir aber die Galileitransformation vor uns.

Für die Lorentztransformation hingegen ist, wie aus Gleichung (56) zusammen mit Gleichungen (76), (123) und (125b) hervorgeht:

$$c_1 = -c_2 = c \quad (\text{vgl. auch Gleichung (89)}).$$

Wir können also das Ergebnis unserer Untersuchung folgendermaßen zusammenfassen:

*Unter allen Transformationsgleichungen, die eingliedrigen linearen homogenen Gruppen entsprechen, gibt es drei Typen, bei denen der Betrag der Kontraktion nicht von der Richtung der Bewegung im absoluten Raume abhängt. Darunter hat nur ein Typus eine tatsächliche Kontraktion der Längen zur Folge, nämlich die Lorentztransformation [Gleichung (1)], die beiden anderen Typen, die Galilei- und die Dopplertransformation [Gleichung (2) bzw. (129)] lassen die Längen unverändert. Bei der Lorentztransformation hat die Lichtgeschwindigkeit in allen bewegten Systemen bei beliebiger Fortpflanzungsrichtung denselben endlichen Wert  $c$ . Bei der Dopplertransformation hingegen nur bei Fortpflanzung nach einer Richtung, bei der Galileitransformation überhaupt nur, wenn die Lichtgeschwindigkeit unendlich wäre.*

Wien, 13. Januar 1911.

(Eingegangen 15. Januar 1911.)

**2. Das Maxwellsche Gesetz  
der Geschwindigkeitsverteilung in der  
Relativtheorie;  
von Ferencz Jüttner.**

Um die Entropie  $S$  eines idealen einatomigen Gases in einem gegebenen Zustande mittels ihrer allgemeinen Definition

$$(1) \quad S = k \log W,$$

worin  $W$  die Wahrscheinlichkeit des Zustandes ist, zu berechnen und daraus die thermodynamischen Eigenschaften des Gases abzuleiten, muß man eine bestimmte Mechanik zugrunde legen. Man wählte nun bisher stets die Newtonsche Mechanik. Vom Standpunkte des Relativprinzips von A. Einstein ist diese aber bekanntlich nur ein Grenzfall einer allgemeineren Mechanik, und es dürfte von Interesse sein, die Entropie eines solchen ruhenden Gases, sowie mit ihrer Hilfe das Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung im Gleichgewichtszustand unter Annahme der Relativitätsmechanik zu ermitteln; [daran mögen sich dann die Folgerungen über die Zustandsgleichung und die Abhängigkeit der Energie, Entropie und freien Energie von der Temperatur (spezifische Wärmen, adiabatische Gleichungen) anschließen.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Geheimrat Planck für die freundliche Anregung zu dieser Arbeit und seine wohlwollenden Ratschläge meinen wärmsten Dank auszusprechen.

**§ 1. Die Entropie eines ruhenden idealen einatomigen Gases  
in einem beliebigen Zustande.**

Von den Begriffen der Relativitätsmechanik<sup>1)</sup> kommen für die kinetische Gastheorie erstlich in Betracht die Impulskomponenten  $\xi, \eta, \zeta$  eines mit der Geschwindigkeit

$$q = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

1) M. Planck, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. S. p. 136—141. 1906.

bewegten materiellen Punktes von der (Ruh-)Masse  $m$

$$(2a) \quad \xi = m x, \quad \eta = m y, \quad \zeta = m z,$$

worin

$$(2b) \quad x = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad y = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}, \quad z = \frac{\dot{z}}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$$

die auf die Masseneinheit reduzierten Komponenten des Impulses sind.  $c$  bedeutet die Lichtgeschwindigkeit.

Ferner ist der Ausdruck für die lebendige Kraft  $L$  des Massenpunktes  $m$  von Bedeutung:

$$(3) \quad L = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}.$$

Um nun die Wahrscheinlichkeit  $W$  eines beliebigen Zustandes eines ruhenden idealen einatomigen Gases zu berechnen, wählt man zweckmäßig als Zustandsvariablen die drei Koordinaten  $x, y, z$  und die drei reduzierten Impulskomponenten  $x, y, z$  der einzelnen Moleküle, die als Massenpunkte von der (Ruh-)Masse  $m$  und der variablen Geschwindigkeit  $q$  aufzufassen sind. Wendet man nämlich die Hamiltonschen Gleichungen der Relativtheorie<sup>1)</sup> auf die Bewegung der einzelnen Massenpunkte an, so folgt der Satz von Liouville, daß in dem durch die Koordinaten  $x, y, z, x, y, z$  dargestellten sechsdimensionalen Raum die Größe eines beliebigen elementaren Zustandsgebietes

$$(4) \quad d\omega = dx dy dz dx dy dz$$

sich zeitlich nicht ändert, wenn jeder Punkt des Gebietes seinen Ort entsprechend den Gesetzen der Relativitätsmechanik ändert. Daher kann man die Wahrscheinlichkeit  $dW$  dafür, daß ein Zustandspunkt  $x/y/z/x/y/z$  in ein bestimmtes Elementargebiet  $d\omega$  fällt, einfach gleich  $d\omega$  setzen. Hierbei ist  $d\omega$  als „Makrodifferential“ (nach einem Ausdruck von Planck) zu wählen, d. h. so, daß es trotz seiner Kleinheit im allgemeinen noch sehr viele Zustandspunkte enthält. Würde man wie in der gewöhnlichen Mechanik

$$(5) \quad d\sigma = dx dy dz dx dy dz$$

1) M. Planck, l. c. p. 140 u. 141.

als Elementargebiet nehmen, so würde dieses sich bei Zugrundelegung der Relativmechanik für die Bewegung der bestimmten in ihm gelegenen Zustandspunkte  $x/y/z/x/y/z$  zeitlich ändern. Also ist die Wahrscheinlichkeit  $dW$  dafür, daß ein solcher Punkt in  $d\sigma$  liegt, hier nicht durch die Größe von  $d\sigma$  zu messen; sie wird vielmehr eben durch die Größe des zu  $d\sigma$  gehörigen  $d\omega$  angegeben<sup>1)</sup> (vgl. unten § 3).

Der Zustand des Gases, das nicht im Gleichgewicht zu sein braucht, ist gegeben, wenn man die Zahl der in jedem Elementargebiet  $d\omega$  gelegenen Zustandspunkte  $x/y/z/x/y/z$  kennt. Diese Anzahl sei nun dargestellt durch den Ausdruck

$$(6) \quad dN = F(x, y, z, x, y, z) \cdot dx dy dz dx dy dz \equiv F d\omega,$$

worin  $F$  die gegebene Verteilungsfunktion ist.  $dN$  ist dabei wieder als eine große Zahl, als ein Makrodifferential, aufzufassen. Die Gesamtzahl  $N$  der Moleküle des Gases ist dann:

$$(7) \quad N = \int F d\omega.$$

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $W$  des Zustandes  $F$  teilt man das ganze sechsdimensionale Zustandsgebiet des Gases in lauter Elementargebiete gleicher Wahrscheinlichkeit, also nach dem Obigen in lauter gleich große Gebiete  $d\omega$ . Dann ergibt sich in bekannter Weise<sup>2)</sup> die Wahrscheinlichkeit  $W$  des Zustandes  $F$  der  $N$  Moleküle:

$$(8) \quad W = \frac{N!}{H \{ (F d\omega)! \}} = \frac{\{ \int F d\omega \}!}{H \{ (F d\omega)! \}}.$$

Somit erhält man aus Gleichung (1) bei Anwendung der Formel von Stirling folgenden Ausdruck für die Entropie  $S$  des Zustandes  $F$ :

$$(9) \quad S = \text{const.} - k \int F \log F d\omega.$$

1) Vgl. M. Planck, Acht Vorlesungen über theoretische Physik p. 55—57. Leipzig 1910.

2) Vgl. M. Planck, Acht Vorlesungen p. 60—62. Überhaupt möge für die genauere Ausführung aller Überlegungen und Rechnungen, die in der relativtheoretischen Behandlung der Gastheorie nicht geändert werden, auf die vierte Vorlesung des Buches verwiesen werden.

Für gegen die Lichtgeschwindigkeit  $c$  kleine Geschwindigkeiten  $q$  der Gasmoleküle wird angenähert

$$\begin{aligned} x &= \dot{x}, \quad y = \dot{y}, \quad z = \dot{z}, \quad d\omega = d\sigma, \\ F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) &= F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \equiv \varphi. \end{aligned}$$

Daher geht  $S$  dann in den bekannten Näherungsausdruck  $S_0$  der gewöhnlichen Gastheorie über:

$$(9^*) \quad S_0 = \text{const.} - k \int \varphi \log \varphi \, d\sigma.$$

Entsprechend stellt der Ausdruck

$$H = \int F \log F \, d\omega$$

die relativtheoretische Verallgemeinerung der  $H$ -Funktion von L. Boltzmann, nämlich von

$$\int \varphi \log \varphi \, d\sigma,$$

dar.

## § 2. Das Gesetz der Raum- und Geschwindigkeitsverteilung im thermodynamischen Gleichgewicht.

Betrachten wir jetzt das thermodynamische Gleichgewicht eines ruhenden Gases, dessen Molekülzahl

$$(7) \quad N = \int F \, d\omega,$$

sowie Volumen

$$(10) \quad V = \int dx \, dy \, dz$$

und Gesamtenergie (vgl. (3))

$$(11) \quad E = \int L F \, d\omega = m c^2 \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \cdot F \, d\omega$$

gegebene Werte haben. Die Verteilungsfunktion  $F$  kann nun im Gleichgewicht nicht mehr beliebig sein, da dieses die Bedingung erfüllen muß, daß die durch (9) bestimmte Entropie  $S$  des aus  $N$  Molekülen bestehenden Gases bei Konstanz von  $V$  und  $E$  ein Maximum sein muß:

$$\delta S = 0.$$

Gemäß (9) muß also  $F$  der Gleichung

$$\int (\log F + 1) \cdot \delta F \cdot d\omega = 0$$

mit den aus (7) und (11) folgenden Nebenbedingungen

$$\int \delta F \cdot d\omega = 0, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \cdot \delta F \cdot d\omega = 0$$

genügen. Die Lösung

$$(12) \quad F = \alpha e^{-\beta \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}}$$

ist die gesuchte *Verteilungsfunktion des Gleichgewichts*; die Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  sollen später (in § 4) aus den Werten  $N$ ,  $V$  und  $E$  bestimmt werden.

Da  $F$  hier von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  unabhängig ist, ist die räumliche Verteilung der Moleküle im Gleichgewicht gleichmäßig.

Für gegen  $c$  kleine Werte von  $q$ , für die  $d\omega$  angenähert in  $d\sigma$  übergeht, erhält man durch Reihenentwicklung aus  $F$  den Näherungswert  $\varphi$  des stationären Zustandes:

$$\varphi = \alpha e^{-\beta \left(1 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{c^2}\right)}$$

oder auch:

$$(12^*) \quad \varphi = \alpha' e^{-\beta' (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)},$$

d. i. das gewöhnliche Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung. Die Funktion  $F$  in (12) stellt seine relativ-theoretische Verallgemeinerung dar. In ihr erhält man für  $q = c$  bereits  $F = 0$ , und für  $q > c$  wird  $F$  imaginär, während der Näherungsausdruck  $\varphi$  in (12<sup>\*</sup>) erst für  $q = \infty$  auf  $\varphi = 0$  führen würde, also Überlichtgeschwindigkeit der Moleküle zuließe.

Während der gewöhnliche Ausdruck  $\varphi$  sich in drei Faktoren zerlegen läßt, deren jeder nur von einer Geschwindigkeitskomponente abhängt:

$$\varphi = \alpha' e^{-\beta' \dot{x}^2} \cdot e^{-\beta' \dot{y}^2} \cdot e^{-\beta' \dot{z}^2},$$

eine Eigenschaft, die in der Theorie eine erhebliche Rolle gespielt hat, ist die analoge Zerlegung der allgemeinen Funktion

$$(12a) \quad F = \alpha e^{-\beta \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}}}$$

nicht möglich. Eine ziemlich verwickelte Faktorenerfällung kann man allerdings bei Einführung anderer Zustandsgrößen für die transformierte Funktion vornehmen; hierauf soll unten in anderem Zusammenhange (in § 6) hingewiesen werden.

Die *einfachste* Form von  $F$  gewinnt man mittels (3), nämlich:

$$(13) \quad F = \alpha e^{-\frac{\beta}{m c^2} L}.$$

Führt man durch die Gleichung

$$(12c) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}{m^2} = p^2$$

den reduzierten Impuls  $p$  ein, so besteht zwischen diesem und der Geschwindigkeit  $q$  des Massenpunktes die leicht zu bestätigende Identität:

$$(12d) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}}.$$

Demgemäß erhält man als eine weitere einfache Form von  $F$ :

$$(14) \quad F = \alpha e^{-\beta \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}}}.$$

Die Schreibweise derselben:

$$(14a) \quad F = \alpha e^{-\beta \sqrt{1 + \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{c^2}}}$$

zeigt, daß  $F$  auch nicht in drei Funktionen von  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  einzeln zerlegbar ist. Sie ist die Form, die dem zugrunde gelegten Elementargebiet  $d\omega$  am meisten angemessen ist; hier ist nämlich

$$dN = F d\omega = \alpha e^{-\beta \sqrt{1 + \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{c^2}}} \cdot dx dy dz d\xi d\eta d\zeta.$$

Im Bereich der gewöhnlichen Mechanik fallen die Unterschiede der hier so verschiedenen Gestalten (12), (13) und (14) von  $F$  fast gänzlich fort.

### § 3. Die zu dem gewöhnlichen Elementargebiet $d\sigma$ gehörige Verteilungsfunktion $f$ .

Es ist nun auch möglich, den Zustand des Gases durch die Zustandsvariablen  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  statt durch  $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$

zu bestimmen, d. h. ihn auf das gewöhnliche Elementargebiet

$$(5) \quad d\sigma = dx dy dz \, d\dot{x} \, d\dot{y} \, d\dot{z}$$

zu beziehen und demgemäß die der gewöhnlichen Gastheorie entsprechende Verteilungsfunktion  $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , die durch die Gleichung

$$(15) \quad dN = f \cdot d\sigma$$

definiert ist, jetzt nachträglich zu berechnen. Unter Benutzung der Funktionaldeterminante der ursprünglichen Variablen in bezug auf die neuen gilt nämlich gemäß der Theorie der Transformation vielfacher Integrale die Beziehung zwischen den zueinander gehörenden Elementargebieten, wobei vom Vorzeichen abgesehen wird:

$$d\omega = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})} \cdot d\sigma.$$

Zur Berechnung der Deferminante sind die Gleichungen (2b) zu verwenden:

$$\dot{x} = \frac{\dot{x}}{w}, \quad \dot{y} = \frac{\dot{y}}{w}, \quad \dot{z} = \frac{\dot{z}}{w},$$

wo zur Abkürzung

$$w = \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$$

gesetzt ist; man erhält aus ihnen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{c^2 w^3} (x^2 + c^2 w^2), \quad \frac{\partial \xi}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{c^2 w^3} \cdot \dot{x} \dot{y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \dot{z}} = \frac{1}{c^2 w^3} \cdot \dot{x} \dot{z} \text{ usw.}$$

Daher wird die Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})} = \frac{1}{c^6 w^9} \cdot \begin{vmatrix} x^2 + c^2 w^2, & \dot{x} \dot{y}, & \dot{x} \dot{z}, \\ \dot{x} \dot{y}, & \dot{y}^2 + c^2 w^2, & \dot{y} \dot{z}, \\ \dot{x} \dot{z}, & \dot{y} \dot{z}, & \dot{z}^2 + c^2 w^2 \end{vmatrix}.$$

Die rechts stehende symmetrische Determinante ergibt beim Ausrechnen  $c^4 w^4 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + c^2 w^2)$  oder mit Rücksicht auf die Definition von  $w$  einfacher  $c^6 w^4$ ; daher wird

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})} = \frac{1}{w^5} = \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\right)^5}.$$



Die Beziehung zwischen den einander entsprechenden Elementargebieten lautet demnach:

$$(16) \quad d\omega = \frac{d\sigma}{\left(\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\right)^5}.$$

Der Vergleich von (6) mit (15) gibt sodann für die neue Verteilungsfunktion:

$$(17) \quad f = \frac{F}{\left(\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\right)^5}.$$

Speziell im Gleichgewicht ist gemäß (12):

$$(18) \quad f = \frac{\alpha e^{-\beta \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}}}{\left(\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\right)^5}.$$

Für gegen  $c$  kleine Werte von  $q$  geht  $f$  in (18) in die gewöhnliche Maxwellsche Funktion  $\varphi$  von Gleichung (12\*) über, wie man erkennt, wenn man das starke Wachstum einer Exponentialfunktion gegenüber demjenigen einer Potenz berücksichtigt.

#### § 4. Bestimmung der in dem Verteilungsgesetze $F$ auftretenden Konstanten $\alpha$ und $\beta$ .

Die in der verallgemeinerten Maxwellschen Verteilungsfunktion  $F$  des Gleichgewichtes auftretenden Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  lassen sich mittels der gegebenen Werte  $N$ ,  $V$  und  $E$  des Gases bestimmen. Für  $F$  sei die Form

$$(13) \quad F = \alpha e^{-\frac{\beta}{m c^2} L}$$

zugrunde gelegt, da sie (freilich unter Änderung der Bedeutung der Konstanten) auch in der gewöhnlichen Theorie gilt, wenn man nur für  $L$  den Ausdruck  $(m/2)q^2$  statt desjenigen der Relativtheorie einsetzt. Da also ihre Gestalt bei diesem Übergange invariant bleibt, wird dasselbe auch noch für einen Teil der folgenden Formeln gelten. Auch die Herleitung von (13) ließe sich leicht völlig invariant gestalten.

Aus (7), (10) und (11) folgt, da sich  $F$  hier auf das Gleichgewicht bezieht und also von  $x, y, z$  unabhängig ist:

$$N = V \int F d\mathfrak{x} d\mathfrak{y} d\mathfrak{z}, \quad E = V \int L F d\mathfrak{x} d\mathfrak{y} d\mathfrak{z}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man  $\alpha$  und  $\beta$  berechnen. Die zweite derselben lautet, da nach (13)

$$L F = - m c^2 \frac{\partial F}{\partial \beta}$$

ist, einfacher auch so:

$$E = - m c^2 V \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \int F d\mathfrak{x} d\mathfrak{y} d\mathfrak{z}.$$

Definiert man dann eine Funktion  $M(\beta)$  durch das über das ganze Gebiet der  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$  erstreckte bestimmte Integral

$$(19) \quad M(\beta) = \int e^{-\frac{\beta}{m c^2} L} d\mathfrak{x} d\mathfrak{y} d\mathfrak{z},$$

so ist gemäß (13)

$$\int F d\mathfrak{x} d\mathfrak{y} d\mathfrak{z} = \alpha \cdot M(\beta).$$

Damit nehmen die beiden Bestimmungsgleichungen für  $\alpha$  und  $\beta$  die Form an:

$$N = V \cdot \alpha M(\beta), \quad E = - m c^2 V \cdot \alpha M'(\beta),$$

wo der Strich bei  $M$  die Ableitung nach dem Argument bedeutet. Somit hat man zuerst  $\beta$  aus der Gleichung

$$(20) \quad \frac{M'(\beta)}{M(\beta)} = - \frac{E}{N m c^2}$$

und hierauf  $\alpha$  explizit aus

$$(21) \quad \alpha = \frac{N}{V \cdot M(\beta)}$$

zu berechnen.

Die Erörterungen und Formeln dieses Paragraphen sind sämtlich in dem oben angegebenen Sinne invariant. In der gewöhnlichen Theorie ist jedoch das Integral  $M(\beta)$  elementar auswertbar und ergibt bis auf einen konstanten Faktor die sehr einfache algebraische Funktion  $(\pi/\beta)^{3/2}$ ; somit wird (20) in  $\beta$  linear, womit  $\alpha$  und  $\beta$  explizit bekannt sind. In der Relativtheorie dagegen stellt das Integral  $M(\beta)$  eine höhere transzendente Funktion und (20) eine *transzendente Gleichung* für  $\beta$  dar. Daher sind  $\alpha$  und  $\beta$  hier nicht explizit angebar.

Nunmehr gestattet  $F$  wegen (21) die Darstellung durch  $\beta$  allein:

$$(22) \quad P = \frac{N}{V \cdot M(\beta)} \cdot e^{-\frac{\beta}{m c^2} L}.$$

§ 5. Die Entropie im thermodynamischen Gleichgewicht:  
Zustandsgleichung eines ruhenden idealen einatomigen Gases  
und Temperaturabhängigkeit seiner Gesamtenergie und Entropie  
(spezifische Wärmen und adiabatische Gleichungen), sowie  
seiner freien Energie.

Man kann jetzt leicht die Entropie  $S$  des ruhenden Gases im Gleichgewicht ermitteln und zu thermodynamischen Folgerungen benutzen. Aus der für einen beliebigen Zustand  $F$  gültigen Gleichung

$$(9) \quad S = \text{const.} - k \int F \log F d\omega$$

folgt für das Gleichgewicht wegen (13) bei Beachtung von (7) und (11):

$$(23) \quad S = \text{const.} + k \left\{ \frac{\beta}{m c^2} \cdot E - N \log \alpha \right\}.$$

Mittels (21) kann man  $S$  auch durch  $\beta$  allein, ohne  $\alpha$ , ausdrücken; vereinigt man noch den Ausdruck  $-k N \log N$  mit der Konstanten, so folgt:

$$(24) \quad S = \text{const.} + k N \cdot \left\{ \frac{\beta}{N m c^2} \cdot E + \log M(\beta) + \log V \right\}.$$

In der gewöhnlichen Gastheorie, in der  $\beta$  unmittelbar berechenbar ist, erhält man bekanntlich den ähnlich gebauten, aber expliziten Ausdruck:

$$(24^*) \quad S_0 = \text{const.} + k N \cdot \left\{ \frac{3}{2} \log E + \log V \right\}.$$

Nun folgen aus der rein thermodynamischen Definition der Entropie

$$dS = \frac{dE + P dV}{T}$$

die wichtigen Beziehungen

$$(25) \quad \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_V = \frac{1}{T}, \quad \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_E = \frac{P}{T}.$$

Diese sollen auf den abgeleiteten Ausdruck (24) von  $S$  angewandt werden, und zwar zuerst die zweite Formel.

Da nach (20)  $\beta$  nur von  $E$  und nicht von  $V$  abhängt, folgt aus (24):

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E = \frac{k N}{V},$$

also wegen (25):

$$(26) \quad P V = k N T.$$

Weil bei der Differentiation die Größe  $\beta$  wegfällt, die den Unterschied der Theorien bedingt, gilt somit auch in der verallgemeinerten Gastheorie das Gesetz von Boyle und Gay-Lussac. Ferner ist die Gaskonstante von der Natur des Gases unabhängig, da  $m$  in (26) nicht vorkommt; also behält auch das Gesetz von Avogadro seine Gültigkeit. Die Zustandsgleichung eines ruhenden idealen einatomigen Gases bleibt also in der Relativtheorie völlig erhalten.

Daher bestimmt sich hier in bekannter Weise die universelle Konstante  $k$ , indem man (26) für die  $N_1$  Moleküle eines Moles (Loschmidsche Konstante) vom Volumen  $V_1$  ansetzt und mit der auch auf das Molvolumen bezogenen gewöhnlichen Form

$$(26a) \quad P V_1 = R T$$

vergleicht:

$$(26b) \quad k N_1 = R.$$

Jetzt soll die zweite Formel von (25) benutzt werden. Aus (24) erhält man mit Rücksicht auf (21)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = k N \cdot \left\{ \frac{\beta}{N m c^2} + \left( \frac{M'(\beta)}{M(\beta)} + \frac{E}{N m c^2} \right) \frac{d\beta}{dE} \right\},$$

oder vereinfacht:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = \frac{k \beta}{m c^2},$$

daher wegen (25):

$$(27) \quad \beta = \frac{m c^2}{k T}.$$

Also besteht die sehr anschauliche Bedeutung der Größe  $\beta$  darin, daß sie die absolute Temperatur des Gases mißt. Nun gibt (20):

$$(28) \quad E = - N m c^2 \cdot \frac{M' \left( \frac{m c^2}{k T} \right)}{M \left( \frac{m c^2}{k T} \right)}.$$

In der gewöhnlichen Gastheorie gilt (27) auch; da aber dort (20) in  $\beta$  linear wird, wie oben bemerkt, wird auch  $E$

von  $T$  linear abhängig, und man erhält folgenden sehr einfachen Ausdruck:

$$(28^*) \quad E_0 = \frac{3}{2} N k T.$$

In Gleichung (28) ist also dieses merkwürdige Ergebnis enthalten:

*In der Relativtheorie ist die Energie eines ruhenden idealen einatomigen Gases nicht mehr proportional der Temperatur, sondern eine transzendente Funktion der Temperatur.*

Demgemäß ist eine Vollkommenheit des Gases nach der Definition von Clausius<sup>1)</sup>, welche außer zwei anderen (unten erwähnten) Eigenschaften jene Proportionalität verlangt, in der Relativtheorie im strengen Sinne nicht möglich. Es lassen sich leicht die Gesetzmäßigkeiten aufstellen, welchen die in Kalorien gemessenen Molwärmen bei konstantem Volumen  $C_v$  und bei konstantem Druck  $C_p$  für ein einatomiges Gas hier gehorchen müssen. Bedeutet  $E_1$  die Energie der  $N_1$  Moleküle eines Mols und  $a$  das mechanische Wärmeäquivalent, so erhält man mittels der Definitionsgleichung

$$a C_v = \left( \frac{\partial E_1}{\partial T} \right)_v = \frac{d E_1}{d T}$$

sofort aus (28):

$$C_v = \frac{N_1 m^2 c^4}{a k} \cdot \frac{1}{T^2} \cdot \left\{ \frac{d^2 \log M(\beta)}{d \beta^2} \right\}_{\beta = \frac{m c^2}{k T}},$$

oder ausgeschrieben:

$$(29) \quad C_v = \frac{N_1 m^2 c^4}{a k} \cdot \frac{1}{T^2} \cdot \left\{ \frac{M'' \left( \frac{m c^2}{k T} \right)}{M \left( \frac{m c^2}{k T} \right)} - \left[ \frac{M' \left( \frac{m c^2}{k T} \right)}{M \left( \frac{m c^2}{k T} \right)} \right]^2 \right\}.$$

Diese Temperaturfunktion tritt an Stelle des konstanten Wertes  $C_{v0}$  der gewöhnlichen Theorie der einatomigen Gase, den man auf analogem Wege aus (28\*) erhält:

$$(29^*) \quad C_{v0} = \frac{1}{a} \frac{d E_{10}}{d T} = \frac{3}{2} \frac{N_1 k}{a} = \frac{3}{2} \frac{R}{a} = 3,0.$$

Weiter folgt nun aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik, allein unter den beiden auch in der Relativtheorie gültigen Voraussetzungen für die Idealität eines Gases, daß

1) Vgl. G. H. Bryan, Enzyklop. d. Math. Wiss. V, 1. p. 119.

es nämlich dem Boyle-Gay-Lussac-Avogadroschen Gesetz gehorcht und seine innere Energie  $E$  nur von der Temperatur, nicht vom Volumen abhängt:

$$(30) \quad C_p - C_v = \frac{R}{a}.$$

Wegen (29) ist also auch  $C_p$  sowie  $C_p/C_v$  in der Relativtheorie von der Temperatur abhängig, während man bekanntlich sonst aus (29\*) für einatomige Gase die konstanten Werte erhält:

$$(30^*) \quad C_{p0} = \frac{5}{2} \frac{R}{a} = 5,0; \quad \frac{C_{p0}}{C_{v0}} = \frac{5}{3}.$$

Da sich  $C_v$  mit der Temperatur ändert, können auch die einfachen Formeln für adiabatische Vorgänge nicht mehr gelten. Zur Ableitung der hier gültigen Gleichungen stellt man am besten mittels (24), (27) und (28) die Entropie als Temperaturfunktion dar:

$$(31) \quad S = \text{const.} + kN \cdot \left\{ \log M \left( \frac{m c^2}{k T} \right) - \frac{m c^2}{k T} \frac{M' \left( \frac{m c^2}{k T} \right)}{M \left( \frac{m c^2}{k T} \right)} + \log V \right\};$$

diese Formel ist die Verallgemeinerung der gewöhnlichen aus (24\*) und (28\*) zu erhaltenden:

$$(31^*) \quad S_0 = \text{const.} + kN \cdot \left\{ \frac{3}{2} \log T + \log V \right\}.$$

Setzt man  $S = \text{const.}$ , so hat man damit die Gleichung für eine adiabatische Zustandsänderung eines einatomigen idealen Gases:

$$\log M \left( \frac{m c^2}{k T} \right) - \frac{m c^2}{k T} \cdot \frac{M' \left( \frac{m c^2}{k T} \right)}{M \left( \frac{m c^2}{k T} \right)} + \log V = \text{const.},$$

oder:

$$(32) \quad \frac{M \left( \frac{m c^2}{k T} \right)}{\frac{m c^2}{k T} \cdot \frac{M' \left( \frac{m c^2}{k T} \right)}{M \left( \frac{m c^2}{k T} \right)}} \cdot V = \text{const.}$$

Dies ist die Verallgemeinerung der aus (31\*) folgenden Formel:

$$(32^*) \quad T^{5/2} \cdot V = \text{const.}$$

Durch Kombination von (32) mit der gewöhnlichen Zustandsgleichung (26) erhält man noch die beiden anderen Beziehungen für die adiabatische Zustandsänderung:

$$(33) \quad \frac{T \cdot M \left( \frac{m c^2}{k T} \right)}{\frac{m c^2}{k T} \cdot \frac{M' \left( \frac{m c^2}{k T} \right)}{M \left( \frac{m c^2}{k T} \right)}} = \text{const.},$$

$$P \cdot e$$

$$(34) \quad \frac{M \left( \frac{N m c^2}{P V} \right)}{\frac{N m c^2}{P V} \cdot \frac{M' \left( \frac{N m c^2}{P V} \right)}{M \left( \frac{N m c^2}{P V} \right)}} \cdot V = \text{const.},$$

$$e$$

während (32\*) die entsprechenden gewöhnlichen Formeln ergibt:

$$(33^*) \quad \frac{T^{3/2}}{p} = \text{const.},$$

$$(34^*) \quad (P V)^{3/2} \cdot V = \text{const.} \quad \text{oder} \quad P \cdot V^{3/2} = \text{const.}$$

Auch die freie Energie  $A$  des ruhenden idealen einatomigen Gases muß zufolge ihrer Definition

$$(35) \quad A = E - T S$$

in der Relativtheorie eine veränderte Gestalt annehmen. Da wegen (23) und (27) die Gleichung gilt:

$$S = \text{const.} + \frac{E}{T} - k N \log \alpha,$$

so erhält man:

$$(36) \quad A = k N T \log \alpha - \text{const.} \cdot T.$$

Hiermit hat auch der Koeffizient  $\alpha$  eine anschauliche Bedeutung gewonnen<sup>1)</sup>, indem  $\log \alpha$ , wenn man von der willkürlichen Funktion  $\text{const.} \cdot T$  absieht, der freien Energie des Gases proportional ist. Da der Koeffizient  $\beta$  der Temperatur umgekehrt proportional ist, kann man auch schreiben:

$$(36a) \quad A = N m c^2 \cdot \frac{\log \alpha}{\beta} - \text{const.} \cdot T;$$

wie man erkennt, hängt  $A$  unmittelbar von  $\alpha$  und  $\beta$  ab.

Aus (36), (21) und (27) bekommt man dann, wenn man für  $k N \log N \cdot T - \text{const.} \cdot T$  wieder  $\text{const.} \cdot T$  setzt:

1) Vgl. P. Debye, Ann. d. Phys. 33. p. 453 u. 454. 1910.

$$(37) \quad A = \text{const.} \cdot T - kNT \cdot \left\{ \log M \left( \frac{mc^2}{kT} \right) + \log V \right\},$$

d. i. die Verallgemeinerung der aus (28\*) und (31\*) hervorgehenden gewöhnlichen Formel, in der für  $\frac{3}{2}Nk \cdot T - \text{const.} \cdot T$  entsprechend  $\text{const.} \cdot T$  gesetzt wurde:

$$(37^*) \quad A_0 = \text{const.} \cdot T - kNT \cdot \left\{ \frac{3}{2} \log T + \log V \right\}.$$

Endlich möge auch noch in das Verteilungsgesetz (22) die Temperatur mittels (27) eingeführt werden:

$$(38) \quad F = \frac{N e^{-\frac{L}{kT}}}{V \cdot M \left( \frac{mc^2}{kT} \right)};$$

diese Formel entspricht der gewöhnlichen Gleichung:

$$(38^*) \quad q = \frac{N}{V} \cdot \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{mq^2}{2kT}}.$$

#### § 6. Die Auswertung des bestimmten Integrals $M(\beta)$ .

Um nun zu einer genaueren Diskussion der aufgestellten Gleichungen für die thermodynamischen Größen des ruhenden idealen einatomigen Gases in der Relativtheorie überzugehen, soll jetzt versucht werden, die Funktion  $M(\beta)$ , die in den Formeln auftritt, auf bekannte Funktionen zurückzuführen.

Auf Grund von

$$(19) \quad M(\beta) = \int e^{-\frac{\beta}{mc^2} L} \cdot d\xi d\eta d\zeta$$

ist  $M(\beta)$  durch ein über alle möglichen Werte der reduzierten Impulskomponenten  $\xi, \eta, \zeta$  zu erstreckendes bestimmtes Integral definiert, in dem  $\beta$  als Parameter auftritt. Nun ist nach (2b) für die Geschwindigkeit  $q = 0$  auch  $\xi = \eta = \zeta = 0$ , so daß der (reduzierte) Impuls  $p = 0$  ist; für Lichtgeschwindigkeit  $q = c$  ist dagegen je nach ihrer Richtung zu den Koordinatenachsen wenigstens eine der Komponenten  $\xi, \eta, \zeta$  gleich  $\pm\infty$ , so daß immer der Impuls  $p = \infty$  ist (im Einklang mit (2d)); somit ist in  $M(\beta)$  nach jeder der Variablen  $\xi, \eta, \zeta$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  zu integrieren. Beachtet man ferner, daß aus (3) und (2d) folgt:

$$(3a) \quad \frac{L}{mc^2} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}},$$



so kann man deutlicher schreiben:

$$(39) \quad M(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}} \cdot dx \, dy \, dz.$$

Hierin faßt man einfach  $x$ ,  $y$ ,  $z$  als rechtwinklige Koordinaten eines Zustandspunktes  $P$  in einem gewöhnlichen dreidimensionalen Raume auf und führt in diesem räumliche Polarkoordinaten mit dem Anfangspunkte  $O$  als Pol ein. Der Radiusvektor  $OP$  ist offenbar gemäß (2c) durch den absoluten Betrag des reduzierten Impulses gegeben

$$(40a) \quad p = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

während das Raumelement sofort zweckmäßig in der zusammengezogenen Form angesetzt wird:

$$(40b) \quad dx \, dy \, dz = d\tau = p^2 dp \, d\omega,$$

wo  $d\omega$  einen unendlich kleinen räumlichen Winkel mit  $O$  als Spitze bedeutet.

Dann geht (39) in ein zweifaches Integral über:

$$(41) \quad M(\beta) = \int_{0(\omega)}^{\infty} \int e^{-\beta \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}}} \cdot p^2 dp \, d\omega.$$

In dieser Formel ist übrigens implizit auch eine Umformung der Verteilungsfunktion  $F$  in eine solche enthalten, die nur von einer einzigen der unabhängigen Variablen des Elementargebietes abhängt (siehe oben § 2).

Integriert man jetzt in (41) bei festem  $p$  über die ganze Einheitskugel und beachtet, daß

$$\int_{(\omega)} d\omega = 4\pi$$

ist, so hat man eine Darstellung durch ein einfaches Integral gewonnen:

$$(42) \quad M(\beta) = 4\pi \int_0^{\infty} e^{-\beta \sqrt{1 + \frac{p^2}{c^2}}} \cdot p^2 dp.$$

Endlich setze man noch

$$(43) \quad p = c \cdot \sin \varphi,$$

wo der reelle hyperbolische Winkel  $\varrho$  (genauer: Sektor) für  $p = 0$  bis  $p = \infty$  auch von 0 bis  $\infty$  variiert. Dann erhält man:

$$(44) \quad M(\beta) = 4\pi c^3 \int_0^\infty e^{-\beta \cosh \varrho} \cdot \sin^2 \varrho \cosh \varrho d\varrho.$$

Bevor nunmehr der letzte Schritt der Rechnung getan wird, möge kurz die Deutung der vorgenommenen Transformation nach H. Minkowskis Betrachtungsweise in dem vierdimensionalen Raum der  $x, y, z, l$ , wo  $l = ct$  ist, gegeben werden. Dabei soll trotz der Verwendung hyperbolischer Funktionen die Euklidische Ausdrucksweise benutzt werden. Während zu Anfang dieses Paragraphen  $d\tau$  ein Volumenelement im gewöhnlichen dreidimensionalen Raume, sowie  $d\omega$  die Kegelöffnung in der Richtung von  $O$  nach  $P$  und  $p$  die Entfernung  $OP$  bedeutete, tritt man mit (43) in den vierdimensionalen Raum ein. Hier ist

$$(45) \quad \frac{d\tau}{c^3} = \sin^2 \varrho \cosh \varrho d\varrho d\omega = d\Omega$$

als dreidimensionaler elementarer räumlicher Winkel mit  $O$  als Scheitel aufzufassen; derselbe zeigt im vierdimensionalen Raum der  $x, y, z, l$  von  $O$  nach dem Punkte  $P'$  mit den Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta, L/mc$ , die die rechtwinkligen Komponenten des „Bewegungsvektors“  $\mathfrak{B}$  sind. Der Betrag desselben setzt sich aus seinen Komponenten so zusammen:

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}^2 = \left(\frac{L}{mc}\right)^2 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 = c^2, \\ |\mathfrak{B}| = c. \end{array} \right.$$

Insbesondere ist weiter  $\varrho$  der Winkel, den  $\mathfrak{B}$  oder auch die Richtung  $d\Omega$  mit der Zeitachse, der Polarachse, bildet. Bei dieser Auffassung ist dann gemäß (3a)

$$(47) \quad \frac{L}{mc} = c \cosh \varrho$$

die zeitliche Komponente  $\mathfrak{B}_t$  des Bewegungsvektors und

$$(48) \quad p = c \sin \varrho$$

die komplementäre Komponente  $\mathfrak{B}_{xyz}$  desselben, d. h. die Projektion von  $\mathfrak{B}$  auf den gewöhnlichen Raum. In der einfach-

sten physikalischen Beziehung steht  $\varrho$  zu der Geschwindigkeit  $q$  entsprechend der Gleichung (vgl. (3)):

$$(48) \quad \frac{q}{c} = \mathfrak{T}_g \varrho;$$

auf Grund der Formeln  $\mathfrak{T}_g 0 = 0$ ,  $\mathfrak{T}_g \infty = 1$  erkennt man, daß der Ruhe  $q = 0$  auch  $\varrho = 0$  entspricht, daß aber die Lichtgeschwindigkeit  $q = c$  hier in den Wert  $\varrho = \infty$  des „Geschwindigkeitswinkels“ transformiert wird.<sup>1)</sup>

Zusammenfassend kann man sagen, daß wir in dem Integral (19) mittels (40b) und (43) den Bewegungsvektor

$$\mathfrak{B} = \left( \mathfrak{x} | \mathfrak{y} | \mathfrak{z} | \frac{L}{mc} \right)$$

durch seine vierdimensionalen Polarkomponenten in bezug auf die Zeitachse als Polarachse ausgedrückt haben.<sup>2)</sup> Die dreifache Integration, die in (44) schon auf eine einfache reduziert worden ist, bezieht sich ferner bis auf den Faktor  $c^3$  auf  $d\Omega$ , d. h. auf die dreidimensionale Oberfläche einer vierdimensionalen Einheitskugel (oder mit Berücksichtigung von  $c^3$  auf die Oberfläche einer Kugel vom Radius  $|\mathfrak{B}| = c$ ). Übrigens ist hier, da unsere Formeln hyperbolisch gestaltet sind, die Oberfläche  $\int d\Omega = \infty$ , wie aus der ursprünglichen Deutung von  $d\Omega$  als durch  $c^3$  dividiertes Euklidisches Raumelement  $d\mathfrak{r}$  sofort klar ist.

1) Vgl. A. Sommerfeld, Physik. Zeitschr. 10. p. 826—829. 1909.

2) Die ausführlichen Gleichungen zur Einführung der (hyperbolischen) vierdimensionalen Polarkomponenten oder Polarkoordinaten lauten:

$$\mathfrak{x} = c \cdot \mathfrak{S} \sin \varrho \cdot \sin \lambda \cos \mu,$$

$$\mathfrak{y} = c \cdot \mathfrak{S} \sin \varrho \cdot \sin \lambda \sin \mu,$$

$$\mathfrak{z} = c \cdot \mathfrak{S} \sin \varrho \cdot \cos \lambda,$$

$$\frac{L}{mc} = c \cdot \mathfrak{C} \cos \varrho,$$

wozu noch tritt:

$$d\mathfrak{x} d\mathfrak{y} d\mathfrak{z} = c^3 \cdot d\Omega,$$

$$d\Omega = \mathfrak{S} \sin^2 \varrho \mathfrak{C} \cos \varrho \sin \lambda d\varrho d\lambda d\mu$$

$$= \mathfrak{S} \sin^2 \varrho \mathfrak{C} \cos \varrho d\varrho \cdot d\omega.$$

Diese Formeln würden auf dem kürzesten Wege von (19) zu (44) überleiten, falls man von vornherein den vierdimensionalen Raum als mathematisches Hilfsmittel verwenden will.

Nach dieser Zwischenbetrachtung soll jetzt die Reduktion des Integrals (44) beendet werden. Auf Grund der Formeln

$$\sin^2 \varrho = \cos^2 \varrho - 1, \quad 4 \cos^3 \varrho = \cos 3\varrho + 3 \cos \varrho$$

erhält man:

$$\sin^2 \varrho \cos \varrho = \frac{1}{4} (\cos 3\varrho - \cos \varrho)$$

und somit:

$$M(\beta) = \pi c^3 \cdot \left\{ \int_0^\infty e^{-\beta \cos \varrho} \cdot \cos 3\varrho d\varrho - \int_0^\infty e^{-\beta \cos \varrho} \cdot \cos \varrho d\varrho \right\}.$$

Nun ist für *reelles positives*  $\beta$

$$\int_0^\infty e^{-\beta \cos \varrho} \cdot \cos n\varrho d\varrho = \frac{\pi}{2} \cdot i^{n+1} \cdot H_n^{(1)}(i\beta),$$

wo die  $H_n^{(1)}$  eine Gattung der Besselschen oder Zylinderfunktionen bedeuten, nämlich die Hankelschen *Zylinderfunktionen erster Art* von der  $n$ . Ordnung.<sup>1)</sup> Während diese für jedes reelle Argument komplex sind, sind für ein positiv imaginäres Argument  $i\beta$  die Funktionen ungerader Ordnung reell, diejenigen gerader Ordnung rein imaginär, so daß also die rechte Seite der letzten Gleichung, wie nötig, stets reell (genauer: positiv) ist. Für unendliches positives  $\beta$  verschwindet  $H_n^{(1)}(i\beta)$ .

Die  $\beta$  betreffende Bedingung ist wegen der physikalisch notwendigen Konvergenz von  $M(\beta)$  erfüllt. Daher erhält man:

$$(49) \quad M(\beta) = \frac{\pi^3}{2} c^3 \cdot \{H_3^{(1)}(i\beta) + H_1^{(1)}(i\beta)\}.$$

1) Vgl. E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln, Leipzig 1909. Dort findet sich p. 170 die von Heine herrührende Formel (hier in einer unserem Fall angepaßten Schreibweise)

$$(1) \quad H_n^{(2)}(-i\beta) = i^{n+1} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\beta \cos \varrho} \cdot \cos n\varrho d\varrho,$$

wo  $\beta$  reell positiv; ferner auf p. 95:

$$H_n^{(2)}(x) = e^{i(n+1)\pi} \cdot H_n^{(1)}(xe^{i\pi})$$

oder für  $x = -i\beta$ :

$$(2) \quad H_n^{(2)}(-i\beta) = (-1)^{n+1} \cdot H_n^{(1)}(i\beta).$$

Durch Kombination der Formeln (1) und (2) folgt der Ausdruck des Textes.

Nun gilt allgemein die Rekursionsformel<sup>1)</sup>

$$H_{n+1}^{(1)} + H_{n-1}^{(1)} = \frac{2n}{x} \cdot H_n^{(1)},$$

wo  $x$  das gemeinsame Argument ist. Daher erhält man als einfachste Gestalt der gesuchten Funktion:

$$(50) \quad M(\beta) = -2\pi^2 c^3 \cdot \frac{i H_0^{(1)}(i\beta)}{\beta}.$$

Bei nochmaliger Benutzung der Rekursionsformel in der Gestalt

$$H_2^{(1)} = \frac{2}{x} \cdot H_1^{(1)} - H_0^{(1)}$$

geht Gleichung (50) über in

$$(51) \quad M(\beta) = 2\pi^2 c^3 \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \{-2 \cdot H_1^{(1)}(i\beta) + \beta \cdot i H_0^{(1)}(i\beta)\}.$$

Die hier auftretenden Funktionen der beiden niedrigsten Ordnungen  $i \cdot H_0^{(1)}(i\beta)$  und  $-H_1^{(1)}(i\beta)$  liegen tabelliert<sup>2)</sup> vor (was für  $-i \cdot H_2^{(1)}(i\beta)$  bisher nicht der Fall ist); sie nehmen für ein von 0 bis  $+\infty$  wachsendes  $\beta$  selbst von  $+\infty$  bis 0 monoton ab. Auch  $M(\beta)$  ist stets positiv und nimmt beständig ab bis zum Werte Null.

Somit ist die Funktion  $M(\beta)$  jetzt als völlig bekannt anzusehen, da sie durch (49), (50) und (51) auf Besselsche Funktionen reduziert ist.

§ 7. Die relativtheoretischen thermodynamischen Funktionen des ruhenden idealen einatomigen Gases als Hankelsche Zylinderfunktionen der Temperatur.

Unter Benutzung der einfachsten Form (50) von  $M(\beta)$  mögen nun die wichtigsten der in § 5 berechneten thermodynamischen Funktionen, die einem ruhenden idealen einatomigen Gase vom Standpunkte der Relativtheorie aus zukommen, explizit angegeben werden.

Die Energie  $E$  wird wegen (20)

$$(52^1) \quad E = Nm c^2 \cdot \left\{ \frac{1}{\beta} - \frac{i \cdot H_2^{(1)'}(i\beta)}{H_2^{(1)}(i\beta)} \right\},$$

1) Jahnke-Emde p. 165.

2) Jahnke-Emde p. 134—136. Die Tabellen gehen von  $\beta = 0,2$  bis  $\beta = 12,0$ ; man vgl. auch die beiden zugehörigen Kurven S. 134.

wo der Strich bei  $H_2^{(1)}$  die Differentiation nach dem Argument, d. h. nach  $i\beta$ , bedeutet, oder analog zu (28):

$$(52^2) \quad E = N m c^2 \cdot \left\{ \frac{k T}{m c^2} - \frac{i \cdot H_2^{(1)'} \left( i \frac{m c^2}{k T} \right)}{H_2^{(1)} \left( i \frac{m c^2}{k T} \right)} \right\}.$$

Die Entropie  $S$  wird nach (24):

$$(53^1) \quad \left\{ \begin{aligned} S &= \text{const.} + k N \cdot \left\{ -\beta \cdot \frac{i H_2^{(1)'}(i\beta)}{H_2^{(1)}(i\beta)} \right. \\ &\quad \left. + \log(-i \cdot H_2^{(1)}(i\beta)) - \log \beta + \log V \right\}, \end{aligned} \right.$$

oder entsprechend (31):

$$(53^2) \quad \left\{ \begin{aligned} S &= \text{const.} + k N \cdot \left\{ -\frac{m c^2}{k T} \cdot \frac{i \cdot H_2^{(1)'} \left( i \frac{m c^2}{k T} \right)}{H_2^{(1)} \left( i \frac{m c^2}{k T} \right)} \right. \\ &\quad \left. + \log \left( -i \cdot H_2^{(1)} \left( i \frac{m c^2}{k T} \right) \right) + \log T + \log V \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die freie Energie  $A$  wird gemäß (37):

$$(54^1) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \text{const.} \cdot \frac{1}{\beta} - \frac{N m c^2}{\beta} \cdot \left\{ \log(-i \cdot H_2^{(1)}(i\beta)) \right. \\ &\quad \left. - \log \beta + \log V \right\} \end{aligned} \right.$$

oder:

$$(54^2) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \text{const.} \cdot T - k N T \cdot \left\{ \log \left( -i \cdot H_2^{(1)} \left( i \frac{m c^2}{k T} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \log T + \log V \right\}. \end{aligned} \right.$$

Übrigens lassen sich diese Gleichungen ebenso wie (51) sämtlich mittels  $H_1^{(1)}$  und  $H_0^{(1)}$  allein schreiben, wenn man außer der oben angegebenen Rekursionsformel noch die weitere<sup>1)</sup>

$$\frac{d H_n^{(1)}(x)}{dx} = -\frac{n}{x} \cdot H_n^{(1)} + H_{n-1}^{(1)}$$

benutzt. Doch möge hier nur der so zu erhaltende Ausdruck

1) Jahnke-Emde p. 165.

für die Energie angegeben werden, der also unmittelbar die Benutzung der vorhandenen Funktionstafeln gestattet:

$$(55) \quad E = N m c^2 \cdot \frac{(6 + \beta^2) \cdot H_1^{(1)}(\beta) - 3\beta \cdot i \cdot H_0^{(1)}(\beta)}{\beta \cdot (2 H_1^{(1)}(\beta) - \beta \cdot i \cdot H_0^{(1)}(\beta))}.$$

§ 8. Numerische Diskussion: die Zahlenwerte von  $\beta$  und das Verhältnis der relativtheoretischen zur gewöhnlichen Gastheorie.

Wie die Relativmechanik für kleine Geschwindigkeiten in die Newtonsche Mechanik übergeht, so muß notwendig die relativtheoretische Gastheorie für kleine mittlere Molekulargeschwindigkeiten, d. h. für niedrige Temperaturen, in die gewöhnliche Gastheorie übergehen. Um dies genauer überblicken zu können, ist eine zahlenmäßige Diskussion der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Formeln notwendig. Dabei kann man sich auf die Untersuchung von  $E$  beschränken, da von dessen Verhalten auch dasjenige von  $C_v$ ,  $S$ ,  $A$  usw. unmittelbar abhängt.

Zuerst möge die Größenordnung der Zahlenwerte von

$$\beta = \frac{m c^2}{k T}$$

ermittelt werden, da  $\beta$  in allen Formeln das primäre Argument ist. Es ist<sup>1)</sup>

$$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}, \quad k = 1,346 \cdot 10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{grad}},$$

also

$$\beta = \frac{9}{1,346} \cdot 10^{26} \cdot \frac{m}{T}.$$

Obwohl nun der die Temperatur messende Parameter  $\beta$  eine reine Zahl ist (auch in bezug auf die Temperatur), so ist er doch offenbar keine universelle Funktion der Temperatur, sondern dem Molekulargewicht des Gases proportional. Da  $\beta$  meist recht groß werden wird, wählen wir als Beispiel das *Helium*, da dieses unter den einatomigen Gasen das kleinste Atomgewicht, nämlich  $\text{He} = 3,99$  (gegen  $\text{O} = 16,000$ ), hat. Für den auch einatomigen Quecksilberdampf, dessen Atomgewicht

1) M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig 1906. p. 162; oder Acht Vorlesungen p. 93 und 94.

Hg = 200,0 ist, würde  $\beta$  bei gleicher Temperatur immer 50mal größer sein als für das Helium.

Die Masse eines Heliummoleküls ist

$$m = \frac{8,99}{6,175 \cdot 10^{23}} \text{ g} = 6,46 \cdot 10^{-24} \text{ g},$$

wo  $6,175 \cdot 10^{23}$  der Zahlenwert<sup>1)</sup> der oben (vgl. (26b)) eingeführten Loschmidschen Konstanten  $N_1$  ist. Demnach gilt für He:

$$\beta = \frac{4,32 \cdot 10^{13}}{T},$$

und man erhält folgende Übersichtstabelle:

$T$ (° abs.)	$\beta$
0	$\infty$
3	$1,44 \cdot 10^{13}$
300	$1,44 \cdot 10^{11}$
6000	$0,72 \cdot 10^{10}$
1 Billion	43,2
43,2 Billionen	1
1 Trillion	$4,32 \cdot 10^{-5}$
$\infty$	0

Man erkennt, daß bei den dem Experiment zugänglichen Temperaturen der Parameter  $\beta$  für *alle* einatomigen Gase immer einen sehr hohen Wert besitzt: Auch wenn man die auf über 20000° berechneten Temperaturen mancher Fixsterne hier berücksichtigen wollte, würde doch  $\beta$  in diesem Gebiete für keinen Stoff unter den Wert einer Milliarde herabsinken.

In diesem Temperaturbereiche und noch weit höher hinauf darf man daher gewiß für die Zylinderfunktionen ihre asymptotischen Darstellungen anwenden. Es gilt nun für großes  $\beta$ ):

$$-i \cdot H_2^{(1)}(i\beta) = \frac{e^{-\beta}}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi \beta}} \cdot S_2(2\beta),$$

1) Vgl. die Anmerkung auf p. 877.

2) Jahnke-Emde p. 100 u. 98.



wo

$$S_2(2\beta) = 1 + \frac{4 \cdot 2^2 - 1}{1! 8\beta} + \frac{(4 \cdot 2^2 - 1)(4 \cdot 2^2 - 9)}{2! (8\beta)^2} + \dots$$

$$= 1 + \frac{15}{8\beta} + \frac{105}{128\beta^2} + \dots$$

eine halbkonvergente Reihe ist. Hiermit geht (50) über in (vgl. § 4 am Ende):

$$(56) \quad M(\beta) = 2^{3/2} \pi^{1/2} c^3 \cdot \frac{e^{-\beta}}{\beta^{3/2}} \cdot S_2(2\beta).$$

Für die Energie gilt nach (20) die Gleichung

$$E = -Nm c^2 \cdot \frac{d \log M(\beta)}{d\beta};$$

nach (56) ist ferner:

$$\log M(\beta) = \text{const.} - \beta - \frac{3}{2} \log \beta + \log S_2(2\beta);$$

daher erhält man folgenden asymptotischen Ausdruck für die Energie:

$$(57) \quad E = Nm c^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{3}{2\beta} - \frac{1}{S_2(2\beta)} \cdot \frac{d S_2(2\beta)}{d\beta} \right\}.$$

Betrachtet man nun zuerst sehr große  $\beta$ , so kann man angenähert

$$S_2(2\beta) = 1$$

setzen; man bekommt dann aus (57):

$$(58^1) \quad E = Nm c^2 \cdot \left( 1 + \frac{3}{2\beta} \right)$$

oder:

$$(58^2) \quad E = Nm c^2 + \frac{3}{2} N k T.$$

Die Vergleichung mit dem Ausdruck  $E_0$  aus (28\*) gibt:

$$(59) \quad E = Nm c^2 + E_0.$$

Also geht in der Tat bei den unseren Experimenten zugänglichen Temperaturen  $E$  angenähert in eine lineare Funktion der Temperatur über, und zwar in den gewöhnlichen Ausdruck  $E_0$  bis auf das konstante additive Glied  $Nm c^2$ . Dieses letztere, das im Unterschiede zu  $E_0$  von der Natur des Gases abhängig

ist, ist als dessen innere Energie aufzufassen, die es auch bei  $T = 0$  besitzt.<sup>1)</sup>

Will man jetzt die Abweichung der Energiefunktion von der Linearität ermitteln oder die Energie für weniger große  $\beta$  berechnen, so muß man die vollständige Gleichung (57) anwenden. Da

$$\frac{dS_2(2\beta)}{d\beta} = -\frac{15}{8\beta_2} - \frac{105}{64\beta^3} + \dots$$

ist, so erhält man folgende explizite genauere *asymptotische Darstellung der Energie* (für große  $\beta$ ):

$$(60^1) \quad E = N m c^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{3}{2\beta} + \frac{15}{8\beta^3} - \frac{15}{8\beta^5} \dots \right\}$$

oder:

$$(60^2) \quad E = N m c^2 + \frac{3}{2} N k T + \frac{15 N k^3}{8 m c^2} T^2 - \frac{15 N k^3}{8 m^2 c^4} T^3 \dots$$

Aus (60<sup>1</sup>) erkennt man, daß das Verhältnis der ersten Korrektion von  $E$  zu dem Hauptwert  $E_0$  durch

$$\frac{15}{8\beta^3} : \frac{3}{2\beta} = \frac{5}{4\beta}$$

gegeben wird. Dies beträgt für Helium

$$T \cdot 2,9 \cdot 10^{-13} \text{ Proz.};$$

daher ist für dieses Gas der wirkliche Wert  $E - N m c^2$  z. B. bei Zimmertemperatur um ca.  $10^{-9}$  Proz., bei  $6000^\circ$  um ca.  $2 \cdot 10^{-8}$  Proz. und bei  $\frac{1}{10}$  Billion Grad um ca. 0,3 Proz. größer als der Näherungswert  $E_0$ . Für Quecksilberdampf fallen diese Korrekturen noch 50 mal kleiner aus.

Die Gleichung (59) und somit die Clausiussche Annahme siehe oben § 5) ist also bei *jedem* einatomigen Gase *bis zu einer Temperatur von  $\frac{1}{10}$  Billion Grad herauf* praktisch vollkommen erfüllt, so daß auch für die spezifischen Wärmen, die

1) Vgl. M. Planck, Ann. d. Phys. 26. p. 1—34. 1908. Entsprechend gibt der im Text zugrunde gelegte Ausdruck (3) für  $L$  annähernd für kleine  $q$  den Wert

$$L = m c^2 + \frac{m}{2} q^2.$$

adiabatischen Vorgänge usw. hier praktisch die gewöhnlichen Formeln gelten.

Geht man andererseits in den Temperaturen bei Helium über 10 Billionen Grad, bei Quecksilberdampf über 500 Billionen Grad hinauf, so hat in diesen extremen Gebieten das lineare Gesetz (59) seine Bedeutung ganz verloren, da dort  $\beta$  klein wird (vgl. oben die Tabelle). Die Temperaturabhängigkeit von  $E$  wird dann nur durch die Zylinderfunktionen bestimmt gemäß (52) oder (55). Auch die asymptotischen Darstellungen (60) gelten dort nämlich nicht mehr; sie haben ihre besondere Bedeutung vor allem in dem Mittelgebiet der Temperaturen, also z. B. für Helium von  $\frac{1}{10}$  Billion bis etwa zu 1 Billion Grad, da hier die Korrektionsglieder erheblich werden und dennoch  $\beta$  noch groß ist.

Betrachtet man mehrere einatomige Gase von derselben Temperatur, so sind ihre Energien  $E$  verschieden, da wegen der Ungleichheit ihrer Molekulargewichte  $m$  auch ihre Parameter  $\beta$  verschieden sind. *Das Gesetz der gleichmäßigen Energieverteilung ist also in der Relativtheorie der idealen einatomigen Gase in strengem Sinne niemals erfüllt.* Beschränkt man sich jedoch auf Temperaturen von unter einer Billion Grad, für die (52) durch (60<sup>2</sup>) ersetzt werden kann, so sieht man, daß gerade in dem Hauptglied  $E_0$  sich der Massenfaktor  $m$  fortgehoben hat, während dies in allen übrigen Gliedern nicht der Fall ist. Also kann man in diesem Temperaturbereiche genauer sagen: für das Hauptglied gilt das Gesetz der gleichmäßigen Energieverteilung, für die innere Energie und die Korrektionsglieder aber nicht. Dabei verhalten sich die Korrektionsglieder erster Ordnung umgekehrt wie die ersten, diejenigen zweiter Ordnung umgekehrt wie die zweiten Potenzen der Molekulargewichte usw. (vgl. oben das Zahlenbeispiel für He und Hg). Beschränkt man sich nunmehr noch weiter, nämlich auf Temperaturen unter  $\frac{1}{10}$  Billion Grad, so gilt hier praktisch gleichmäßige Energieverteilung, da dann nur  $E_0$  noch in Betracht kommt; von der konstanten inneren Energie wird dabei abgesehen.

Vergleicht man zum Schluß noch Gase von verschiedenen Molekulargewichten mit Resonatorenssystemen von verschiedenen Schwingungszahlen, wie sie Planck in der Strahlungstheorie eingeführt hat, so erkennt man, daß streng genommen beide

Arten von Gebilden bei keiner Temperatur eine gleichmäßige Energieverteilung aufweisen. Angenähert zeigen eine solche die Resonatoren unter sich bei hohen Temperaturen und nicht zu großen Schwingungszahlen<sup>1)</sup>, die Gase unter sich bei niederen Temperaturen (im oben erklärten Sinne), Resonatoren und Gase gemeinsam also bei mittleren Temperaturen (d. h. bei den gewöhnlichen hohen Temperaturen unserer Experimente).

Berlin, den 30. Januar 1911.

---

1) M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, p. 159—160.

(Eingegangen 5. Februar 1911.)

**3. Untersuchung**  
**der Einwirkung des Magnetfeldes auf den**  
**Dopplereffekt der Kanalstrahlen;**  
**von H. Baerwald.**

**I. Einleitung.**

1. Die verschiedenen Untersuchungen über die Natur der Träger von Spektralserien haben bisher ein sicheres und eindeutiges Resultat nicht ergeben. Kommt Herr J. Stark auf Grund seiner Versuche über elektrische Gasspektren<sup>1)</sup> zu der Ansicht, daß die Träger der Linienspektren, einschließlich der Hauptserie, ein- bzw. mehrwertige positive Atomionen seien, so führen die Untersuchungen von P. Lenard über die Lichtemission der Alkalimetalldämpfe und Salze<sup>2)</sup> zu dem Schlusse, daß wohl die Träger der Nebenserien positive Ladung haben, die Träger der Hauptserie dagegen neutral seien.

Wohl führte die Hypothese von Stark zur Auffindung des Dopplereffektes im Spektrum der Kanalstrahlen, allein die neueren Untersuchungen von W. Wien<sup>3)</sup> über die positiven Strahlen haben es sehr wahrscheinlich gemacht, daß das Leuchten des Wasserstoffkanalstrahls neutralen Teilchen zuzuschreiben sei. Wie weit hierbei die Träger der Serie beteiligt seien, blieb noch dahin gestellt.

Um zu dieser Frage einen Beitrag liefern zu können, suchen die folgenden Beobachtungen an den Kanalstrahlen des Wasserstoffs nach einer Einwirkung, welche das Magnetfeld auf den Dopplereffekt, also auf die Träger der Serie, ausübt. Besteht ein solcher, so kann er als Kennzeichen für die Träger und deren Zahl herangezogen werden und im Verein mit anderen Messungen sicherere Schlüsse auf die Natur

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 14. p. 506. 1904.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 17. p. 197. 1905, und früher Ann. d. Phys. 9. p. 642. 1902; 11. p. 636. 1903.

3) W. Wien, Ann. d. Phys. 27. p. 1025. 1908; 30. p. 349. 1909; 33. p. 871. 1910.

der Serienträger zu ziehen gestatten als es bisher vielleicht möglich war.

## II. Versuchsanordnung.

2. Die Versuchsanordnung verwandte die von W. Wien<sup>1)</sup> angegebene Methode, das Gas beständig das Entladungsrohr durchströmen und von der ununterbrochen arbeitenden Pumpe fortschaffen zu lassen. Die Beobachtungen wurden nur an den Kanalstrahlen des Wasserstoffs gemacht, der, elektrolytisch aus verdünnter Phosphorsäure entwickelt, in einen Raum zur Vortrocknung und von dort in einen ca. 8 Liter fassenden Behälter über Phosphorpentoxyd trat. Von hier gelangte er durch Kapillaren von  $\frac{1}{10}$  mm Durchmesser und zusammen 2 m Länge in das Entladungsrohr, aus dem ihn eine Kaufmannpumpe fortschaffte. Kühlung durch Mischung von fester Kohlensäure mit Aceton erhöhte die Reinheit der Strahlen. Bei einem Drucke von ca. 5 cm Hg im Gasometer arbeitete bei diesen Abmessungen der Apparat tagelang ohne nennenswerte Regulierung, was bei den Daueraufnahmen im vollständig verdunkelten Zimmer auch wünschenswert war.

Das Entladungsrohr, mit einem Induktorium betrieben, hatte die in Fig. 1 skizzierte Gestalt. Die Elektroden *D* und *E*

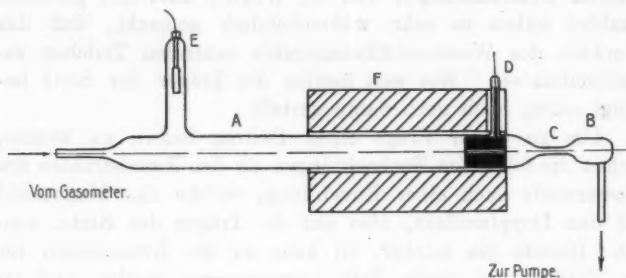


Fig. 1.

des Entladungsraumes *A* hatten einen Abstand von 50 cm, der Rohrdurchmesser betrug 37 mm. Von der eisernen, mit Aluminium belegten und mit einem Kanal von 5 mm Durch-

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 23. p. 415. 1907.

messer versehenen Kathode *D* war, wie diese geerdet, ein paar 5 cm dicker eiserner Halbzylinder bis zur Mitte des Rohres zum Schutze der Entladung gegen die Wirkungen des Magneten herumgelegt, der sich bei *C* befand. Der Beobachtungsraum *B* wurde je nach Bedürfnis geändert. Meist bestand er aus nur mehr oder weniger großen Erweiterungen des 5–6 mm im Lichten messenden Rohrstückes *C*.

3. Zu den photographischen Aufnahmen diente anfangs ein älteres Steinheilsches Prismenspektroskop, mit einem Prisma, Öffnungsverhältnis 1:9, welches mit einer kleinen, unverstellbaren Kassette versehen, jeweils nur eine Aufnahme zu machen gestattete. Für die Untersuchung einer merklichen Einwirkung des Magnetfeldes auf die Geschwindigkeitsverteilung im Dopplereffekt reichte der Apparat aus, weil bei einer solchen nur die Änderung der Kurvenform, nicht der Absolutbetrag der Schwärzung zwischen zwei Photogrammen festgestellt werden sollte. Verschiedene Emulsionsbeschaffenheit und chemische Behandlung der Platten konnten keine Fehler in den Folgerungen bedingen, sofern man sich nur im Bereich der Normalbelichtung der Platten befand.

Zur Feststellung feinerer Unterschiede stand ein neuer Steinheilscher Dreiprismenspektrograph großer Lichtstärke zur Verfügung. Das Öffnungsverhältnis des Kollimators war 1:3, das des Kameraobjektivs 1:2,6, dabei der Linsendurchmesser 65 bzw. 75 mm. Die Abbildung war in der ganzen Platten-ebene mit großer Annäherung scharf, wenn man Sorge trug, die Einstellung auf  $\frac{1}{10}$  mm genau vorzunehmen. Mit diesem Instrument ließen sich in rascher Folge auf derselben Platte verschiedene Aufnahmen machen, die Unveränderlichkeit und Reinheit der Versuchsbedingungen sich für den Vergleich mehrerer Spektrogramme sehr gut aufrecht erhalten, was zur Beurteilung der zu erwähnenden Aufnahmen und eines aus ihnen zu entnehmenden Effektes des magnetischen Feldes hervorgehoben sein mag.

Zu den Aufnahmen dienten Schleussners „Ultra-Rapid“-Platten, die mit Brenzkatechinentwickler 4 Minuten lang bis zum Beginn des Schleierns entwickelt wurden. Wichtige Vergleichsaufnahmen wurden auf dieselbe Platte gebracht. Im übrigen sicherte die möglichst streng beobachtete Gleichheit

der Plattenbehandlung in allen Fällen eine ausreichende Genauigkeit der photographischen Methode.

### III. Versuche über die Änderung der Geschwindigkeitsverteilung in der bewegten Intensität.

4. Die Aufnahmen mit dem älteren Spektographen hatten die Beantwortung der Frage zum Ziel, ob das Magnetfeld eine Änderung in der Geschwindigkeitsverteilung des Dopplereffektes bedinge. Der allgemeine Charakter der Schwärzungskurven für  $H_\gamma$ , welche Linien allein zunächst aufgenommen wurde, ist der in den Figuren 2, 5 und 6 gegebene. Die Schwärzungskurven wurden mit einem Hartmannschen Mikrophotometer

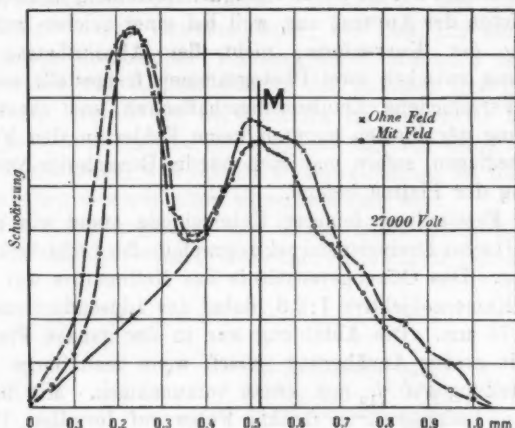


Fig. 2.

aufgenommen. Sie geben ein Bild der wirklichen Intensitätsverteilungen; denn Unterexpositionen wurden vermieden, und in allen Fällen fielen die Schwärzungen in den normalen Schwärzungsbereich des photographischen Vergleichskeils.

Die Maxima in der bewegten Intensität traten bei den angewandten Spannungen von 5000—30000 Volt nicht mehr einzeln hervor.<sup>1)</sup> Die bewegte Intensität enthielt offenbar alle

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 23. S. 247. 1907.



Geschwindigkeiten von Null bis zum Maximum, sie setzte keineswegs erst bei einer bestimmten Geschwindigkeit ein und war in allen Fällen zur Maximalordinate  $M$  wesentlich symmetrisch. Die ruhende Intensität schien der bewegten auf ihrem Anstiege gleichsam nur aufgesetzt, wie es die Figuren in den Punktierungen andeuten. Die gleiche Auffassung lassen auch die Kurven zu, welche die Herren Paschen und Stark mit Gitteraufnahmen erhalten haben, und mit ihr entfällt die Veranlassung, die Lichtquantenhypothese zur Erklärung der Kurven heranzuziehen.

5. Am Charakter dieser Geschwindigkeitsverteilungskurven änderten nun magnetische Felder nichts, weder starke (bis zu 9000 Gauss) noch schwache, obgleich die abgelenkten Strahlen, wie die Glasfluoreszenz erkennen ließ, noch innerhalb des Magnetfeldes die Glaswand trafen und den Beobachtungsraum  $B$  (Fig. 3) gar nicht erreichten. Die Magnetpole waren vierkantig und endeten, kegelförmig sich zuspitzend, in einem Kreisquerschnitt von 4 cm Durchmesser, ihr Abstand war 1 cm, zwischen ihnen lief das 0,5—0,6 cm weite Ver-

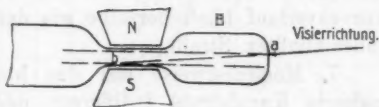


Fig. 3.

bindungsstück des Entladungs- und Beobachtungsraumes, welches in  $B$ , einer 4 cm langen Rohrerweiterung, seine Fortsetzung fand. Die Visierrichtung durchschnitt den Strahl von  $a$  nach  $b$ , noch im Magnetfelde endend. Die Schwärzung der Platte rührte also von zwei Bündelteilen her, deren einer, der zwischen den Polen befindliche, entweder gar keine positiven Träger hatte, oder doch so wenig, daß das Dissoziationsgleichgewicht auch nicht annäherungsweise bestand, deren anderer, dem Gleichgewicht näher, wenigstens in seiner ersten Hälfte als überwiegend aus neutralen Teilchen bestehend zu betrachten war. Von der 8 cm langen Visierstrecke waren 6 cm vom Magnetfelde von positiven Trägern gänzlich oder doch größtenteils befreit. Die Helligkeit der Strahlen aber wurde durch die stärksten Felder nur wenig beeinflußt, die Abnahme war im Beobachtungsraum bemerkbarer als zwischen den Polen.

Die Ausmessung der Schwärzungen für die Aufnahme mit

und ohne Feld ergab den in Fig. 2 dargestellten Kurvenverlauf. Die ruhenden Intensitäten sind zufällig gleich stark und mit ihren Maximalordinaten aufeinandergelegt. Die bewegte Intensität der Aufnahme mit Feld hat gegenüber der ohne Feld ihre Gestalt nicht geändert; nur liegt sie tiefer, und zwar ist ihre Maximal- und Symmetrieordinate  $M$  gegenüber jener um 8 Proz. kleiner.

6. Um nun den im Beobachtungsraum  $B$  verlaufenden Kanalstrahlteil gesondert für sich aufnehmen zu können, ohne das Licht der vorhergehenden Teile mit auf den Spalt zu be-

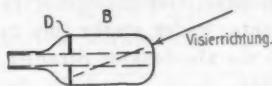


Fig. 4.

kommen, wurde ein Diaphragma  $D$  aus Messing mit einer 5 mm weiten Bohrung geerdet eingesetzt und in der Pfeilrichtung (Fig. 4) anvisiert. Aber auch hier konnte weder mit

schwachen, noch mit starken Feldern (1000—9000 Gauss) eine Einwirkung erzielt werden. Der Kurvenverlauf blieb derselbe wie der bei den Aufnahmen am unbeeinflussten Strahl.

7. Möglicherweise war der hinter dem Magneten verlaufende Kanalstrahl indifferent und eine Feldbeeinflussung nur auf den zwischen den Polen befindlichen Abschnitt zu erwarten. Der Beobachtungsraum  $B$  wurde also ganz entfernt, und das Rohr endete noch zwischen den Polen. Die Visierrichtung wurde so genommen, daß nur die 4 cm, welche zwischen den Polen verliefen, ihr Licht in den Spalt entsandten; die Pole wirkten dabei selbst als Diaphragma und blendeten das vorhergehende Bündel ab. Das Magnetfeld hatte auch in diesem Teile keine Wirkung, und es war damit erwiesen, daß die Erfolglosigkeit der in Nr. 5 beschriebenen Versuche nicht daher rühren konnte, daß der vielleicht vorhandene geringe Effekt eines Teiles vom andern überdeckt worden war.

8. In den bisher beschriebenen Versuchen war die Spannung am Entladungsrohr durch Parallelschaltung einer Funkenstrecke von 7—8 mm zu 25000—27000 Volt gegeben. Bei dieser Spannung hatte das Kanalstrahlbündel seine größte Helligkeit. Die nächsten Versuche wurden mit einer Entladungsspannung von 5000—8000 Volt, entsprechend 1—2 mm

Funken zwischen Messingkugeln von 2 cm Durchmesser, an-  
gestellt, das Vakuum so einreguliert, daß der Strom ab und  
zu die Funkenstrecke passierte, was durch den Druck im  
Wasserstoffbehälter und die Tourenzahl der Pumpe leicht zu  
bewerkstelligen war. Auch hier hatte die Schwärzungskurve  
für die bewegte Intensität die zur Maximalordinate  $M$  sym-  
metrische Gestalt, das Gesamtbild aber unterschied sich von  
dem früheren dadurch, daß hier die ruhende Intensität er-  
heblich geringer war als die bewegte (Fig. 5). Da nun mit

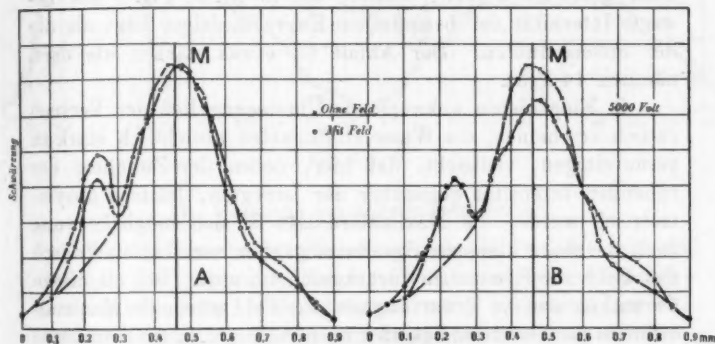


Fig. 5 A, B.

wachsender Spannung die Zerstäubung der Metalle zunimmt,  
die Menge Wasserstoff, schon an und für sich verringert, da-  
durch in wachsendem Maße verunreinigt wird, so bestätigt  
diese Beobachtung die Versuche Strassers<sup>1)</sup>, der die Wirkung  
der Elektrodenzerstäubung als mit derjenigen verunreinigender  
Gasbeimengungen zum Wasserstoff identisch fand. Allein die  
ruhende Intensität und ihr Verhältnis zur bewegten war für  
die vorliegenden Versuche von geringerem Interesse, wichtig  
war nur die Geschwindigkeitsverteilung in der bewegten In-  
tensität, und diese änderte sich durch das Magnetfeld auch hier  
nicht, obgleich, wenn überhaupt eine Abhängigkeit von der  
Spannung besteht, ein magnetischer Einfluß bei niederen Ge-  
schwindigkeiten eher zu erwarten war als bei höheren.

1) B. Strasser, Ann. d. Phys. 31. p. 890. 1910.

Fig. 5 zeigt die Unbeeinflussbarkeit der Geschwindigkeitsverteilung deutlich. Hier ist die Kurve „Mit Feld“ auf die Kurve „Ohne Feld“ — sie seien kurz die beeinflusste und unbeeinflusste Kurve genannt —, umgerechnet, und zwar in  $A$  so, daß die Maximalordinaten der bewegten, in  $B$  so, daß diejenigen der ruhenden Intensität aufeinanderfallen. Innerhalb der Grenzen der Messungsungenauigkeiten sind die bewegten Intensitäten in  $A$  identisch, die ruhenden dagegen weichen voneinander in dem Sinne ab, daß, wenn sie (in  $B$ ) zur Konizidenz gebracht werden, wieder, wie in Nr. 5, Fig. 2 die bewegte Intensität der beeinflussten Kurve niedriger liegt als die der unbeeinflussten. Der Abfall ist etwas stärker wie dort, nämlich 14 Proz.

9. Eine hieran anknüpfende Überlegung ließ den Versuch rätlich erscheinen, die Wasserstoffstrahlen absichtlich stark zu verunreinigen, vielleicht, daß hier, neben der Zunahme der ruhenden Intensität gegenüber der bewegten, letztere unsymmetrisch wurde, die Maximalordinate  $M$  sich möglicherweise nach der Seite kleinerer Geschwindigkeiten verschob und durch das Feld zur Symmetrie zurückgeführt wurde. Bei all diesen Versuchen war die Erwartung die, das Feld würde die Maximalordinate der Geschwindigkeiten nach rechts, d. h. nach größeren Geschwindigkeiten zu verschieben; denn, war eine Feldbeeinflussung vorhanden, so mußte sie vermutlich die geringeren Geschwindigkeiten mehr beeinflussen als die großen.

Die Kathode wurde, statt mit Aluminium, mit Kupfer belegt. Die anfangs sehr starke Zerstäubung nimmt ab und wird bei Dauerentladungen ziemlich konstant. Die Kurven in Fig. 6 wurden an solchen Aufnahmen erhalten, die diesem Zustande entsprechen; im Gegensatz zu den Kurven der Fig. 5 ist die Größe der ruhenden Intensität gegenüber der bewegten bemerkenswert.<sup>1)</sup> Im übrigen sagen sie dasselbe aus wie jene. Die Geschwindigkeitsverteilungskurven fallen in Fig. 6  $A$ , wo ihre Maximalordinaten zusammengelegt sind, gänzlich aufeinander, die beeinflusste und unbeeinflusste Kurve weist keinen Unterschied in ihrem Verlaufe auf. Unterschieden sind sie nur in ihrer Größe, wie Fig. 6  $B$  beweist, welche die Maximal-

1) B. Strasser, l. c.

ordinaten der ruhenden Intensität zusammenlegt. Die beeinflusste Kurve liegt hier in der bewegten Intensität um 20 Proz. tiefer gegenüber der unbeeinflussten.

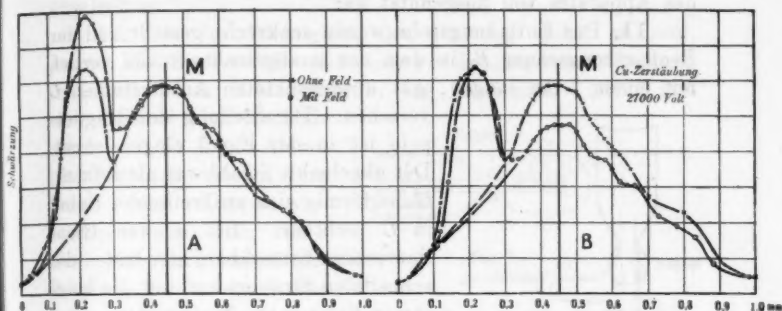


Fig. 6 A, B.

#### IV. Versuche am abgelenkten Strahl.

10. Die Entscheidung der Frage, ob positive oder neutrale Teilchen die Träger des Linienspektrums sind, war mit Sicherheit und eindeutig zu beantworten, wenn es gelang, am abgelenkten Strahl das Fehlen des Dopplereffektes nachzuweisen. Mit einem Unterschied in optischer Hinsicht konnte ein solcher in elektrischer verbunden und gesagt werden, daß die neutralen Teilchen die Träger der Serie seien. Der Erfolg war freilich von vornherein unwahrscheinlich, weil die positiven, abgelenkten Strahlen durch Regeneration dem Gleichgewichtszustande zustreben und dann wieder neutrale Teilchen enthalten.

Wegen der sehr geringen Helligkeit des abgelenkten Strahles konnten die Versuche nur bei Anwendung eines Spektrographen von außergewöhnlicher Lichtstärke gelingen. Zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit des oben (Abschnitt II, Nr. 3) beschriebenen Steinheilschen Dreiprismenspektrographen sei angeführt, daß er bei einer Spaltöffnung von 0,0025 mm am unabgelenkten Strahl Aufnahmen in 5—10 Minuten zu machen gestattete. Dennoch waren für die vorliegenden Versuche Expositionen bis zu 40 Stunden nötig. Dabei wurde die aufzunehmende Stelle des Strahls mit einer Linse auf dem

Spalte abgebildet und Sorge getragen, daß das Öffnungsverhältnis des konvergierenden Strahlenkegels dem des Spektrographenkollimators entsprach, so daß die Leistungsfähigkeit des Apparates voll ausgenutzt war.

11. Das Entladungsrohr wurde senkrecht gestellt und der Beobachtungsraum *B*, in dem der unabgelenkte Strahl verlief, mit einem 5 cm langen, gut ausgebuchteten Ansatzstutzen *C*

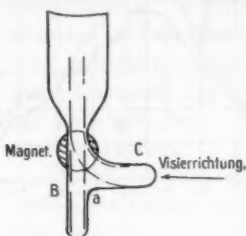


Fig. 7.

versehen. Die Stellung der Magnetpole ist in der Fig. 7 eingezeichnet. Der abgelenkte Strahl war als diffuser, fächerförmig sich ausbreitender Nebel in *C* sichtbar. Bei *a* war Glasfluoreszenz bemerkbar, hier trafen die schnellsten Strahlen auf, nur die langsamen fielen in die Visierrichtung und konnten gegebenenfalls einen Dopplereffekt erzeugen. Der Nachteil dieser Versuchsanordnung war der, daß auch

das Licht des unabgelenkten Strahles auf die Platte gelangte und die Aufnahme als Superposition von zwei Teilbündeln gedeutet werden mußte.

Obleich die Platten, die  $H_\beta$  und  $H_\gamma$ , bei lichtstärkeren Aufnahmen auch die übrigen Linien enthalten, sei im folgenden, wie vorher nur die  $H_\gamma$ -Linie betrachtet. Sie zeigte bei

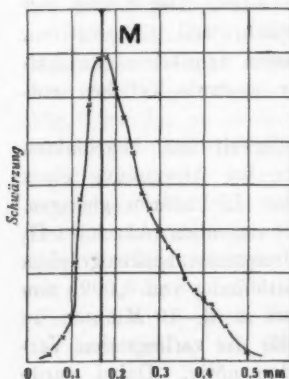


Fig. 8.

der besprochenen Versuchsanordnung die in Fig. 8 dargestellte Intensitätsverteilung. *M* ist die Maximalordinate der ruhenden Intensität, welche vom unabgelenkten Strahl herrührt. Ihr gegenüber ist die Verteilung eine unsymmetrische, sie ist nach kleineren Wellenlängen zu, in der Figur rechts, breiter als in der Richtung nach größeren. Wir deuten die Erscheinung durch Annahme eines Dopplereffektes im abgelenkten Bündel. Da nur die geringen Geschwindigkeiten des letzteren in

die Visierrichtung fallen, so kommt es zu keinem selbständigen Maximum in der Kurve der bewegten Intensität des abgelenkten Strahles gegenüber der der ruhenden des unabgelenkten.

12. Um der Richtigkeit der Deutung sicher zu sein, wurden weitere Versuche mit einer zweckmäßigeren Anordnung angestellt. Das Entladungsrohr lag horizontal. Der 5 mm weite Kanal der Kathode setzte sich in einem Aluminiumröhrchen, welches vorn durch eine Kappe verschlossen war, fort; bei *a* war ein nach oben gekehrtes, 7 mm langes und 3,5 mm breites Fensterchen eingefeilt. In die großen Polschuhe des Magneten wurden kleine Zylinder aus weichem Eisen eingesetzt und diese bis auf Rechtecke von 5 mm Breite zugeshärft. Diese Anordnung ermöglichte es, schärfer definierte, ausgeblendete Bündel des abgelenkten Strahles und diesen ganz für sich, frei vom Lichte des unabgelenkten zu erhalten. Er hatte etwa die in Fig. 9 gezeichnete Gestalt. Die Lichtverteilung blieb bei schwachen wie bei starken Feldern dieselbe, nur wölbte sich der Strahl in letzteren mehr nach *c* aufwärts. In allen Fällen war das Maximum der Helligkeit in dem nach *b* gerichteten Strahlteil; dort, wo er die Glaswand traf, war auch die Fluoreszenz am stärksten. Dies deutet darauf hin, daß einem bestimmten Strahlteil ein ziemlich konstanter Betrag abgelenkter Teilchen entspricht; bei anwachsendem Magnetfelde wird der Abzug langsamer durch das Hinzukommen schnellerer an der betreffenden Stelle ausgeglichen.

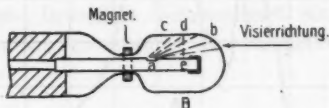


Fig. 9.

Bilden wir nun in der angedeuteten Visierrichtung den Querschnitt *de* des Bündels auf dem Spalte ab, so werden wir bei starken Feldern einen Dopplereffekt zu erwarten haben, dessen bewegte Intensität in ihrer Maximalordinate von der ruhenden verschiedenen Abstand hat: Unten bei *e*, wo die hohen Geschwindigkeiten vorherrschen, wird er größer sein als oben bei *d*, wo sich die stärker abgelenkten langsamen befinden.



Dem entsprach das Schwärzungsbild auf der Platte, welches eine 40 stündige Exposition an einem, durch ein starkes (ca. 6000 Gauss) Feld abgelenkten Strahlenbündel

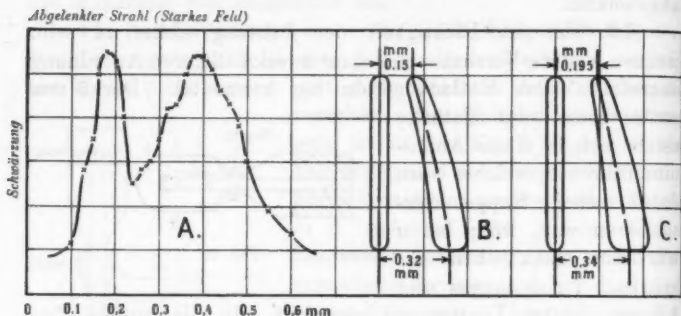


Fig. 10 A, B, C.

lieferte. Fig. 10 B gibt es annähernd wieder: Der Abstand der Mittellinie beträgt:

$$a' = 0,15 \text{ mm},$$

$$b' = 0,32 \text{ mm}$$

oder, auf die Visierichtung korrigiert, da die äußersten Strahlen  $20^\circ$  bzw.  $40^\circ$  mit der Rohrachse einschlossen (Fig. 10 C):

$$a = 0,195 \text{ mm},$$

$$b = 0,34 \text{ mm}.$$

Da bei  $H_y$  die Dispersion des Spektrographen  $27,5 \text{ \AA./mm}$  beträgt, so berechnen sich die Geschwindigkeiten der schnellsten, bzw. der langsamsten Strahlen in diesem Versuche zu

$$v_a = 3,7 \cdot 10^7 \text{ c/s},$$

$$v_b = 6,5 \cdot 10^7 \text{ c/s}.$$

Die Ausmessung des mittleren Teils ergab die Verteilungskurve Fig. 10 A. Trotz der magnetischen Zerlegung ist auch hier die bewegte Intensität nicht scharf, sondern es kommen an jeder Stelle die verschiedensten Geschwindigkeiten neben der durch die maximale Schwärzung gekennzeichneten vor.



13. Für schwächere Felder wandelte sich die Kurve Fig. 10 A in Kurve Fig. 11 um. Die schnellsten Strahlen treten nicht mehr aus dem Fenster, das Maximum der bewegten Intensität wird niedriger und verschiebt sich nach links, der ruhenden zu. Schließlich, wenn nur noch die langsamsten Strahlen das Fenster verlassen können, wird aus dieser Kurve die gestrichelte hervorgehen, welche mit Fig. 8 identisch ist und für die Richtigkeit unserer oben gegebenen Deutung spricht: Die bewegte Intensität kennzeichnet sich nur noch als Asymmetrie des Kurvenverlaufes der ruhenden.

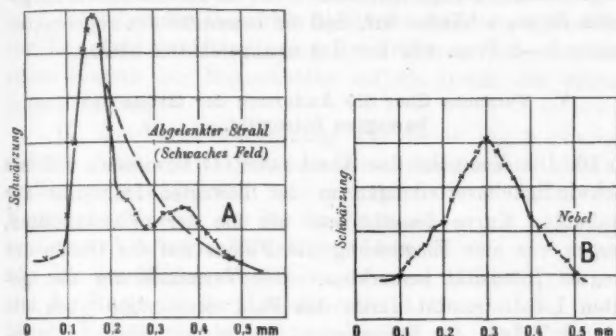


Fig. 11 A, B.

Die Aufnahmen am abgelenkten Kanalstrahlenbündel weisen dieselben Dopplereffekterscheinungen auf wie der unabgelenkte Strahl und gestatten daher, allein für sich genommen, keinen Rückschluß auf die Natur der Träger der Serie.

14. Wurde das Feld ausgeschaltet, so blieb der Beobachtungsraum nicht ganz dunkel, sondern war, besonders oberhalb des Fensters *a*, mit einem feinen diffusen Nebel erfüllt, offenbar von diffusen Kanalstrahlen herrührend. Aufnahmen von diesem Nebel zeigten die Linien der Wasserstoffserie ohne Dopplereffekt, aber stark verbreitert, eine Erscheinung, welche den nach allen Richtungen hin vorkommenden höheren Geschwindigkeiten zuzuschreiben sein dürfte (Fig. 11 B).

15. Das Aluminiumröhrchen wurde bei dem Fenster *a* abgeschnitten, so daß der sichtbare Teil des unabgelenkten Strahles dieselbe Länge hatte, wie der abgelenkte Strahl. Darauf wurden, ohne daß an der Versuchsanordnung sonst etwas geändert worden wäre, auf derselben Platte, welche die in Nr. 12 und 14 beschriebenen Aufnahmen enthielt, eine Reihe von Zeitaufnahmen am unabgelenkten Strahl zur Aufstellung einer Skala der Schwärzungen gemacht. Es stellte sich heraus, daß die 40 stündige Exposition am abgelenkten Strahl dieselbe Schwärzung hervorrief wie eine halbstündige Exposition am unabgelenkten. Da die Aufnahmen alle im Normalschwärzungsbereich lagen, schließen wir, daß die Intensität des abgelenkten Strahles 1—2 Proz. von der des unabgelenkten betrug.

V. Versuche über die Änderung der Größe der bewegten Intensität.

16. Die Versuche des Abschnittes III bewiesen, daß die Geschwindigkeitsverteilungen in der bewegten Intensität der beeinflussten Kurve dieselbe war wie die der unbeeinflussten. Dagegen war eine Einwirkung des Feldes auf die Größe der bewegten Intensität bemerkbar. Die Verminderung der gesamten Lichtintensität durch das Feld erniedrigte auch die Zahl der Träger der Serienlinien, sei es mittelbar oder unmittelbar, und machte bei den Aufnahmen mit Feld längere Expositionen nötig als bei den Aufnahmen ohne Feld, wenn man auf annähernd gleiche Schwärzungen kommen wollte. Dieser Einfluß schien sich nun aber auf die ruhende und bewegte Intensität nicht in gleicher Weise zu verteilen, sondern diese stärker als jene herabzudrücken. Wir fanden in den früheren Versuchen eine Schwächung von 8—20 Proz. des ursprünglichen Wertes, um welche die bewegte Intensität im Magnetfelde mehr sank als die ruhende.

Diese Versuche hatten die zu vergleichenden Aufnahmen auf verschiedenen Platten machen müssen. Die Geschwindigkeitsverteilungen ließen sich aus ihnen auch gut und einwandfrei beurteilen. Versuche über absolute Größe von Schwärzungen verlangten dagegen, daß die zu vergleichenden Aufnahmen auf derselben Platte entworfen wurden und zwar zur Sicherung der Entladungskonstanz in möglichst kurzer Zeit.

Jede Inkonstanz wirkte auf das Verhältnis der ruhenden und bewegten Intensität und trübte den Einfluß, welchen das Magnetfeld auf diese Größe ausübte.

Zu völliger Konstanz gelangte der Apparat erst nach vierstündigem ununterbrochenen Arbeiten. Offenbar brauchte die Kältemischung sowie die Entladung soviel Zeit, um die letzten Quecksilberdampfreste und die immer von neuem den Elektroden entströmenden Verunreinigungen im reinen Wasserstoffstrom mit fortzuführen. Zahlreiche Aufnahmen bewiesen, daß daran auch dann sich nichts änderte, wenn der Apparat wochenlang zu täglichen Versuchen gedient hatte.

Die folgenden Versuche berücksichtigten diese Umstände; ihr Resultat, eine Bestätigung der früheren Versuche, stellte einen Einfluß des Magnetfeldes auf die Größe der bewegten Intensität fest.

17. Die Versuchsanordnung war der in Fig. 9 skizzierten nahezu gleich. Wieder war ein Aluminiumröhrchen als Kanalverlängerung angebracht und mit einer Kappe verschlossen, nur lag das Fenster seitlich und in seiner Mittellinie 15 mm von der der Magnetpolschneide, 55 mm von der Rückseite der Kathode entfernt. Dieses Fenster wurde schräg anvisiert, so daß der Ausschnitt des Bündels, welcher sein Licht auf den Spalt des Spektrographen warf (in Fig. 12 schraffiert), gerade hinter den Polschneiden lag, ohne mit einem Teil zwischen sie hineinzuragen. Man durfte sicher sein, in diesem Ausschnitt einen solchen zu haben, der völlig unter der Einwirkung des Magneten stand, ohne durch Lichtbeimengungen anderer, vielleicht weniger beeinflusster Partien gestört zu sein.

Nach Zusammensetzung des Apparates wurde tagelang gereinigt, dann eine Reihe anderweitiger Aufnahmen zur Probe gemacht und am sechsten Tage zu den Hauptaufnahmen geschritten. Vier Stunden nach Beginn wurde zuerst eine Aufnahme ohne Feld, dann eine solche mit Feldwirkung (ca. 6000.Gauss), jede zu  $1\frac{1}{2}$  Stunden gemacht. Die bewegte

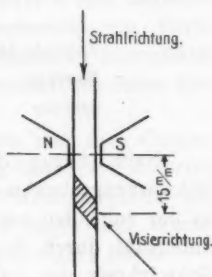


Fig. 12.

Intensität der zweiten war im Verhältnis zur ruhenden gegenüber der ersten geringer geworden, obgleich wachsende Reinheit der Entladungen bei der eingehaltenen Reihenfolge umgekehrt hätte wirken müssen.

Indessen, da die Aufnahmen wenig intensiv waren, wurde sogleich an demselben Tage,  $7\frac{1}{2}$  Stunden nach Beginn, ein anderes Paar, jede einzelne zu 3 Stunden gemacht, so zwar, daß wechselweis alle 10 Min. das Feld ein- bzw. ausgeschaltet und entsprechend die Kassette, auf und nieder geschoben, stets in dieselben Stellungen, die der beeinflussten bzw. unbeeinflussten Strahlaufnahme zugehörten, gebracht wurde.

Es zeigte sich dasselbe Ergebnis wie im ersten und in allen früheren Versuchen mit ausgesprochener Deutlichkeit. Die Photometrierung ergab folgende Stellungen des photographischen Vergleichskeiles für die Maximalschwärzungen:

Tabelle 1.

	Ohne Feld	Mit Feld
Ruhende Intensität	40,7	38,9
Bewegte „	35,5	31,3
Schleier	19,0	19,0

Nach Abzug des Plattenschleiers berechnet sich eine Schwärzungsabnahme in der bewegten Intensität um 25,4 Proz., in der ruhenden um 8,2 Proz. Die Schwächung der bewegten Intensität durch das Feld ist also auch hier stärker als die Schwächung der ruhenden, ohne daß dabei der Strom eine nennenswerte Beeinflussung erfahren hätte.

18. Damit wäre die Möglichkeit zu Rückschlüssen über die Natur der Träger der Serie gegeben, wenn es gelingt, den an der bezeichneten Stelle des Kanalstrahlenbündels gefundenen Effekt des Magnetfeldes auf die, der Serie zugehörige Lichtemission mit demjenigen zu vergleichen, welchen das Feld ebendort auf die gesamte Lichtintensität ausübt. Mit der Kenntnis der magnetischen Beeinflussung der von den Kanalstrahlen mitgeführten Elektrizitätsmenge besitzen wir alsdann die nötigen Daten, um das Gefundene im bezeichneten Sinne zu verwerten.

19. Zunächst kam es darauf an, die gesamte, aus dem Fenster ausgestrahlte Lichtmenge des unbeeinflussten Strahles mit der des magnetisch beeinflussten zu vergleichen. Dies geschah an derselben Versuchsanordnung, mit welcher die Aufnahmen in Nr. 17 gemacht worden waren. An die Stelle des Spektrographen trat das Photometer von L. Weber, welches für die vorliegende Messung passend hergerichtet wurde. Eine Linse entwarf von dem Fenster im Aluminiumrohr ein Bild auf die Ebene des Lummerschen Würfels, wo es im Mittelfeld sichtbar war. Von dem Randfeld wurde durch schwarzes Papier so viel abgeblendet, daß ein ebenso großes Rechteck übrig blieb, wie es das Bild des Fensters darstellte. Rechtwinklig zu dieser Visierrichtung war eine Photometerbank orientiert; die Strahlung einer Osramlampe, durch Gelatineblättchen passend auf die des Kanalstrahlbündels abgestimmt, erleuchtete durch die Milchglasplatte des Photometers hindurch das Vergleichsrechteck. Beide Vergleichsfelder grenzten mit einer Rechteckseite aneinander und erlaubten eine bequeme und sichere Photometrierung. Die Verwendung von Farbfiltern erscheint einwandfrei, da die zu messenden Intensitätsunterschiede gering waren, das Purkinjesche Phänomen also nicht störend werden konnte.

Zur Kontrolle wurden die Messungen mit drei Osramlampen von 4, 8 und 16 Kerzen durchgeführt; sie lieferten als Entfernungen der Lampen von der Milchglasplatte des Photometers die in nachstehender Tab. 2 gegebenen Werte, welche zeigen, daß das Entfernungsgesetz gewahrt blieb.

An der durch das Fenster ausgeschnittenen Stelle des Bündels sank die gesamte Lichtmenge, d. h. diejenige, welche von allen Lichtträgern ausgestrahlt wird, bei Einschaltung des Feldes um 25—27 Proz. ihres Anfangswertes. Die Schwächung rührte von dem Fehlen derjenigen Strahlung her, die ihren Ursprung in den vom Felde beseitigten Teilchen haben, wobei noch dahingestellt bleibt, ob sie das Licht im geladenen Zustande oder bei der Rekombination aussenden. Damit ist eine Zuordnung der auf die photographische Platte einwirkenden Lichtmenge und der auf ihr erzeugten Schwärzung ermittelt, es ist festgestellt, daß jene früher in Nr. 17 gefundene Abnahme der Schwärzung in der bewegten Intensität

Tabelle 2.

Entfernungen in cm:	4 Kerzen		8 Kerzen		16 Kerzen	
	Mit Feld	Ohne Feld	Mit Feld	Ohne Feld	Mit Feld	Ohne Feld
	89,5	76,2	136,1	117,0	179,0	152,2
	85,6	75,9	137,7	116,6	178,8	151,5
	89,4	76,4	135,6	117,6	178,8	150,9
	87,9	75,7	135,2	116,9	177,2	153,2
	88,4	75,5	136,9	115,8	179,5	151,5
	87,4	77,0	137,1	117,7	177,9	152,0
	89,2	76,5	136,5	117,8	179,4	152,4
	88,6	76,6	135,6	117,4	177,9	152,1
	89,4	77,3	136,6	118,3	178,4	151,3
	88,1	76,9	136,3	117,2	179,3	152,8
Mittel:	88,4	76,4	136,4	117,2	178,6	152,0
Quadratisches Mittel:	7810	5840	18600	13740	31900	23100
Prozentuale Abnahme:	25,3 %		26,0 %		27,5 %	

der  $H_\gamma$ -Linie von 25,4 Proz. zu einer prozentualen Abnahme der gesamten Lichtmenge von 25—27 Proz. gehört, sofern diese ebenfalls durch das Feld hervorgerufen wird.

20. Wir bestimmen jetzt das Verhältnis der Menge der die Serie emittierenden Lichtträger zur Menge der Lichtträger überhaupt, diejenigen mit einbegriffen, welche das Violinienspektrum aussenden. Dies geschah in der Weise, daß durch Vorschaltung eines photographischen Keiles vor den Spalt des Spektrographen das nunmehr magnetisch ganz unbeeinflusste Licht des Kanalstrahles schrittweise geschwächt wurde, bis diese Schwächung dieselbe Veränderung der Schwärzung in der bewegten Intensität hervorrief, wie die Wirkung des Magnetfeldes.

Bei fünf verschiedenen, je um 1 cm auseinanderliegenden Stellungen des Keiles wurden Expositionen von je einer Stunde gemacht und die gefundenen Schwächungen der bewegten Intensität, welche diesmal übrigens denjenigen der ruhenden proportional waren — der magnetische Effekt wurde also abermals bestätigt —, nach Abzug des Plattenschleiers als Funktion der Keilstellungen aufgetragen (Fig. 13 A).

Ferner wurde der photographische Keil mit dem Königschen Spektralphotometer für blau geeicht und die Eichkurve ebenfalls als Funktion der nämlichen Keilstellungen aufgetragen (Fig. 13 B). Beide Kurven vereinigt Fig. 13 C zu einer einzigen, welche die prozentuale Verminderung der Platten-

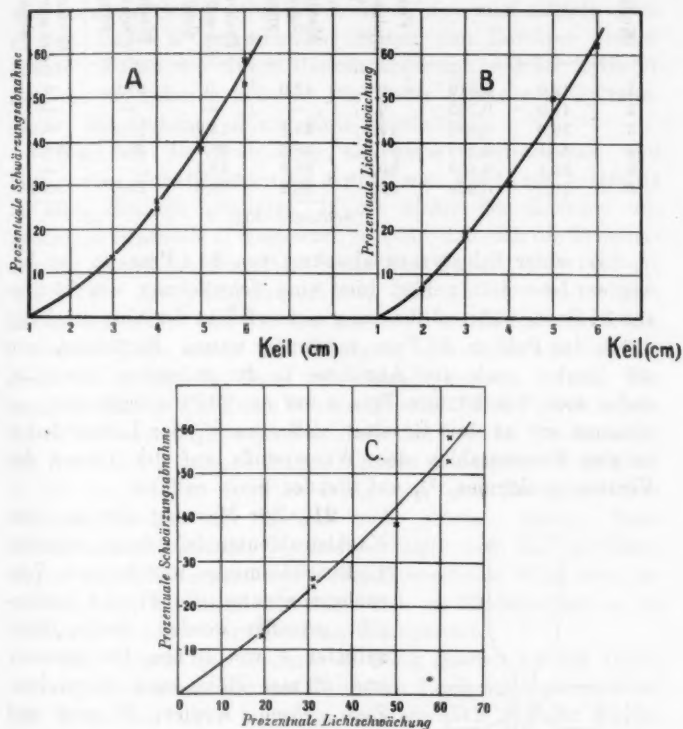


Fig. 13 A, B, C.

schwärzung in ihrer Abhängigkeit von der durch den Keil hervorgerufenen Intensitätsabnahme des Lichtes darstellt, bezogen auf die erste Keilstellung als Anfangsintensität. Die numerischen Daten sind in folgender Tab. 3 zusammengestellt, in welcher  $\alpha$  die Drehung des Okularnikols am Spektralphotometer in Graden bedeutet und  $J = \text{tg}^2 \alpha$  die Lichtintensität ist.

Tabelle 3.

Keilstellungen	$\alpha^\circ$	$J$	Prozentuale Lichtschwächung in %	Aufnahme 1		Aufnahme 2	
				Maximale Schwär- zungen	Prozentuale Schwächungs- abnahme	Maximale Schwär- zungen	Prozentuale Schwächungs- abnahme
1	42,0	0,810	—	42,0	0	35,0	0
2	41,0	0,755	6,8	—	—	—	—
3	39,0	0,655	19,1	39,1	13,2	—	—
4	37,1	0,559	31,0	36,2	26,2	30,8	24,8
5	32,5	0,405	50,0	33,5	38,7	—	—
6	29,0	0,308	62,0	29,2	58,3	26,0	53,0
				Schleier: 20,0		18,0	

Zu einer Schwärzungsabnahme von 25,4 Proz. in der bewegten Intensität gehört hier eine Schwächung des Lichtes von 31 Proz., während für den gleichen Effekt der Abschwächung durch das Feld ca. 27 Proz. notwendig waren. Berücksichtigen wir hierbei noch die Abnahme in der ruhenden Intensität, wobei sich der letztere Betrag auf ca. 20 Proz. reduziert, so kommen wir zu dem Resultat, daß etwa  $\frac{1}{3}$  der Lichtemission in den Kanalstrahlen des Wasserstoffs auf die Träger des Viellinienspektrums,  $\frac{2}{3}$  auf die der Serie entfällt.

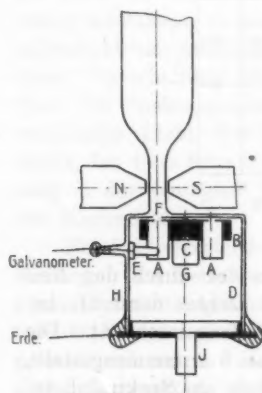


Fig. 14

21. Zur Messung der von dem Kanalstrahlenbündel transportierten Elektrizitätsmenge war folgende Versuchsanordnung, die Fig. 14 wiedergibt, getroffen worden. Sechs Hohlzylinder  $A$  von 10 mm Durchmesser und 20 mm Höhe, aus Aluminium, Zinn, Eisen, Kupfer, Wismut und Kohle gefertigt, waren in eine Vulkanfiberscheibe  $B$  eingesetzt. Im Deckel war eine kreisförmige Öffnung von 4 mm Durchmesser. An der im messingenen Gehäuse  $D$  befestigten Schraube  $C$  konnte die Scheibe sich im Abstände von 1 mm vom Deckel frei drehen. Bei  $E$  war eine durch



Hartgummi isolierte Feder angebracht, welche mit den Zylindern immer dann in guten, elektrischen Kontakt kam, wenn die Zylinderöffnung sich vor der ebenfalls 4 mm großen Bohrung *F* im Gehäuse *D* befand. Eine zweite Feder sicherte die Lage der Isolierscheibe in dieser Stellung. Im Deckel des Gehäuses war bei *J* ein Schliff eingekittet, durch den man mittels eines in den Bügel *G* eingreifenden Stabes den Revolver drehen konnte. Außen war durch Marken angezeigt, welcher Zylinder sich vor der Öffnung befand. Die Feder *E* war zum Galvanometer, das Gehäuse *D* zur Erde abgeleitet.

Nachdem die Anordnung auf gutes mechanisches und elektrisches Funktionieren hin geprüft war, wurde sie, sorgfältig in allen Stücken gereinigt, in die hinter der Kathode angeblasene Glashülle *H* eingesetzt, so zwar, daß sich die Zylinderöffnung genau an derselben Stelle des Kanalstrahles befand, wie früher der Fensterausschnitt, also 15 mm hinter den Magnetschneiden und 55 mm hinter der Kathodenrückseite.

Acht Tage waren zur Reinigung des Apparates im Vakuum nötig, ehe die Gase und Dämpfe entfernt waren. Besonders machte die Kohle Schwierigkeiten. Der Prozeß wurde durch Entladungen zwischen Kathode und Zylinder beschleunigt, die Zerstäubung konnte keinen Schaden anrichten, da sie nicht in das Innere der Zylinder drang und also die spezifischen Verschiedenheiten der Metalle nicht störte. Später, beim Auseinandernehmen des Apparates, zeigte sich, daß die Oberfläche der Zylinder und der Vulkanfiberscheibe völlig rein geblieben war, nur die Kohle hatte sich als Niederschlag an die Glasrohrwand vor der Mündung *F* angesetzt.

22. Wurde der Apparat in Gang gesetzt, so floß zuerst ein negativer Strom von den Zylindern durch das Galvanometer zur Erde, und zwar bei allen in wesentlich gleicher Stärke. In dem Maße als die Kanalstrahlen reiner wurden, ging der Ausschlag zurück und durch Null hindurch zu positiven Werten über. Setzte man gleich nach Beginn die Kühlung an, so wurden die Ausschläge sofort positiv, nach Entfernen der Kühlung negativ, bis sie schließlich dauernd positiv wurden. Da das Anwachsen der negativen Ausschläge mit dem Auftreten der Quecksilberlinien im Kanalstrahl, der Übergang zu positiven Werten mit ihrem Verschwinden im Zusammenhange

stand, so schreiben wir dies Verhalten den im Beginn reichlich vorhandenen Quecksilberdämpfen zu, die, wie die Beobachtungen von W. Wien<sup>1)</sup> zeigen, im Kanalstrahl reichliche negative Ladung mit sich führen.

23. Von mehreren Versuchsreihen sei eine wiedergegeben, die erhalten wurde, nachdem der Apparat mehrere Stunden lang im Betriebe gewesen war (Tab. 4, p. 905). Die Zahlen zeigen keine Abhängigkeit vom Material des auffangenden Zylinders, was den Versuchen des Hrn. Stark<sup>2)</sup> gegenüber hervorzuheben ist.

#### VI. Schlußfolgerungen.

24. Die Zusammenfassung der angestellten Versuche gestattet, einige Schlüsse zu ziehen und nach ihnen das Bild, welches man sich von den Vorgängen im Kanalstrahlenbündel macht, vielleicht mit etwas mehr Sicherheit als bisher zu zeichnen.

Die Tatsache, daß irgend ein Einfluß des Magnetfeldes auf die Geschwindigkeitsverteilung in der bewegten Intensität selbst 15 mm hinter dem wirksamen Felde nicht gefunden werden konnte, führt nicht notwendig auf die Folgerung, daß dort schon das Dissoziationsgleichgewicht zwischen positiven und neutralen Teilchen<sup>3)</sup> wiederhergestellt sei. Denkbar wäre eine völlige Unabhängigkeit der Geschwindigkeitsverteilung vom Dissoziationsprozeß.

Die Einwirkung des Magnetfeldes auf das Größenverhältnis zwischen bewegter und ruhender Intensität gibt die Möglichkeit an die Hand, auf die Natur der leuchtenden Teilchen zu schließen. Es stellte sich heraus, daß etwa  $\frac{2}{3}$  der Lichtemission auf die bewegten Träger der Serie entfällt. Wenn nun an einer bestimmten Stelle des Kanalstrahlenbündels die Lichtintensität der bewegten Strahlen durch das Feld um 25–27 Proz., die positive Elektrizitätsmenge dagegen um ca. 80 Proz. herabgedrückt wird, so ist damit ausgesagt, daß die Träger der Serie nicht positive Teilchen sein können.

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 30. p. 349. 1909.

2) J. Stark, Phys. Zeitschr. 10. p. 752. 1909.

3) W. Wien, l. c.

Tabelle 4.

	Al		Sn		Fe		Cu		Bi		C	
	mit	ohne Feld	mit	ohne Feld	mit	ohne Feld	mit	ohne Feld	mit	ohne Feld	mit	ohne Feld
Ausschläge in cm	2,2	10,6	2,6	12,5	2,3	10,9	2,5	10,8	2,5	10,0	2,1	12,0
	2,6	11,2	2,1	10,5	2,3	12,3	2,5	13,2	2,5	12,5	2,7	12,6
	2,3	11,5	2,0	11,3	2,2	11,7	2,4	11,7	2,5	13,1	2,6	11,2
	2,4	10,9	2,3	11,7	2,5	11,9	2,6	13,3	2,6	13,0	2,9	11,0
	2,5	10,1	2,3	10,9	2,0	11,5	2,5	12,7	2,5	11,4	2,6	11,1
	2,4	11,3	2,2	11,0	2,3	11,5	2,5	12,6	2,4	10,3	2,7	12,8
	2,2	10,7	2,2	11,9	2,2	12,0	2,6	10,9	2,3	12,5	2,9	12,0
	2,6	10,6	2,2	11,7	2,3	11,0	2,6	11,9	2,5	12,5	2,5	11,7
	2,4	10,7	2,0	10,8	2,5	11,7	2,5	13,0	2,6	10,8	2,6	12,3
	2,4	10,9	2,1	11,4	2,3	11,6	2,4	12,3	2,5	11,5	2,6	12,0
Mittel:	2,4	10,9	2,2	11,4	2,3	11,6	2,5	12,2	2,5	11,7	2,6	11,9
Prozentuale Abnahme:	78,0 %		80,7 %		80,2 %		79,5 %		78,7 %		78,2 %	

Mittlere prozentuale Abnahme: 79,2 %

Alle weiteren Aussagen bleiben Vermutungen. Die Versuche sagen nichts über die positiven Teilchen aus, z. B. ob sie nichtleuchtend oder vielleicht Träger des Viellinienspektrums sind. In letzterem Falle müßte sich am Viellinienspektrum der Dopplereffekt nachweisen lassen. Die Versuche lassen es nur als sehr wahrscheinlich erscheinen, daß die Träger der Serie neutrale Teilchen sind, die, wie die Aufnahmen am abgelenkten positiven Strahl anzunehmen zwingen, im Augenblick der Rekombination leuchten und sich im übrigen dem Bilde fügen, welches W. Wien<sup>1)</sup> von den Vorgängen im Kanalstrahl entworfen hat.

Würzburg, Physik. Inst. d. Univ., 6. Febr. 1911.

---

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 30. p. 349. 1909.

(Eingegangen 10. Februar 1911.)

#### 4. Über den Fundamentalsatz der statistischen Mechanik; von Jan Kroò.

Im XII. Kapitel der statistischen Mechanik stellt Gibbs<sup>1)</sup> das folgende Theorem auf: *eine statistische Gesamtheit von mechanischen Systemen konvergiert mit der Zeit im allgemeinen gegen statistisches Gleichgewicht, sofern sie sich nicht im statistischen Gleichgewichte befindet.*

Gibbs hat es ganz unterlassen, diesen Fundamentalsatz der statistischen Mechanik zu präzisieren und ihn allgemein, oder nur für besondere Fälle zu beweisen.<sup>2)</sup> Dennoch macht er von ihm vielfach ausgiebigen Gebrauch, namentlich in seiner mechanischen Theorie der irreversiblen thermodynamischen Prozesse, in welcher der Satz eine fundamentale Rolle spielt.

Trifft das Gibbssche Theorem zu?

In einer 1906 publizierten Arbeit<sup>3)</sup> hat Ludwig Silberstein das Gibbssche Problem aufgeworfen. Hr. Silberstein behauptet, daß der *anfängliche* Charakter der Verteilung *erhalten* bleibt und somit eine statistische Gesamtheit *keine* Tendenz zur Annäherung an einen Zustand des statistischen Gleichgewichtes aufweist.<sup>4)</sup>

1) J. W. Gibbs, Elementary Principles of Statistical Mechanics. New York, 1902. Deutsch bearbeitet von Zermelo: Element. Grundl. der statist. Mech. Leipzig 1905. Die Seitenzahlen der deutschen Ausgabe sind im folgenden in Klammern angeführt.

2) Der von Gibbs nur angedeutete Beweis enthält einen Fehlschluß; und im übrigen ist sein Ansatz nicht imstande, die geforderte Ungleichung zu liefern. Vgl. J. W. Gibbs, p. 144, 148 (146, 151); Ehrenfest, Wiener Ber. d. Akad. d. Wiss, 1906.

3) L. Silberstein, Nuovo Cimento (5) 11. p. 21—34; Jahrb. über die Fortschritte der Mathematik 37. 1906.

4) Auch Zermelo erhebt Einwände gegen den Gibbsschen Satz. Vgl. Jahresbericht der Deutschen Mathem. Vereinig. 1906. p. 239.

Diesen Resultaten kann man nicht beipflichten. Es soll hier nämlich gezeigt werden, daß *einer statistischen Gesamtheit von mechanischen Systemen, welche sich gewissen Forderungen fügen, die von Gibbs behauptete Tendenz doch zukommt.*

### § 1. Grundbegriffe und Grundgleichungen der statistischen Mechanik.

Bezeichnen wir mit  $q_1, \dots, q_n$  die verallgemeinerten Koordinaten, mit  $p_1, \dots, p_n$  die verallgemeinerten Impulse eines klassisch mechanischen Systems  $S$  von  $n$  mechanischen Freiheitsgraden und  $\varepsilon = \varepsilon(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  sei die Energie.

Die kanonischen Differentialgleichungen der Bewegung lauten dann:

$$(1) \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Bilden wir nun eine Menge von mechanischen Systemen, indem wir das vorgelegte System  $S$  mit einer bestimmten Häufigkeit  $\varrho = \varrho(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  in jeder denkbaren, der Natur von  $S$  konformen, Konfiguration und Geschwindigkeit (Phase) reproduzieren.

Derart spezialisierte Mengen werden in der statistischen Mechanik untersucht.<sup>1)</sup> Die Funktion  $\varrho$  nennt man Phasendichte (statistische Verteilungsdichte). Als Funktion von  $q_1 \dots q_n p_1 \dots p_n$  und der Zeit  $t$  betrachtet, genügt sie der partiellen Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{D\varrho}{Dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varrho}{\partial q_i} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} - \frac{\partial \varrho}{\partial p_i} \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_i} \right) = 0,$$

welche die Kontinuität und Inkompressibilität der Verteilung ausspricht.<sup>2)</sup>

1) Man pflegt auch solche Gesamtheiten zu untersuchen, welche nur gewisse Phasengebiete ausfüllen, deren Grenzen vermöge der Bewegung (1) in sich übergehen (invariant sind). Beispielsweise ist die Energiefläche eine Grenzfläche solcher Art.

2) Vgl. etwa J. W. Gibbs, l. c. p. 9 (7).

$$(3) \quad \begin{cases} q_i = q_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n} + t), \\ p_i = p_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n} + t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Wir werden nur solche Fälle zulassen, in welchen die Funktionen (3) *ausnahmslos* im ganzen  $2n$ -fach dimensionalen Raume 1. *eindeutig* in der Zeit und den Konstanten sind und *stetige partielle Ableitungen* erster und zweiter Ordnung besitzen; 2. *periodische Funktionen der Zeit* (für alle  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{2n}$ ) von der Periode  $T$  sind.<sup>2)</sup> Da

so sind die Umkehrfunktionen von (3)

$$(5) \quad \begin{cases} f_1(q_1 \dots p_n) & = \varepsilon_1 \\ f_2(q_1 \dots p_n) & = \varepsilon_2 \\ . & . \\ . & . \\ f_m(q_1 \dots p_n) - t & = \varepsilon_{m-1} \end{cases}$$

„im Kleinen“ für solche Gebiete, in welchen  $\Delta$  nirgends verschwindet, eindeutig und stetig zweimal differenzierbar.<sup>3)</sup> „Im Großen“ sind sie wegen 2. mehrdeutig, können aber durch passende Funktionalbeschränkungen<sup>4)</sup> zu eindeutigen gemacht werden. In diesem Sinne wollen wir die  $f$  als eindeutig bezeichnen. Ferner ist

$$\Delta \equiv \frac{\partial(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n})}{\partial(q_1, \dots, p_n)} \neq 0.$$

1) Diese durch (3) in Parameterform gegebene Kurvenschar wollen wir im folgenden Phasenkurven nennen; den  $2n$ -fach dimensional en  $q, p$ -Raum Phasenraum.

2) Dieses Postulat ist für das Folgende wesentlich.

8) Vgl. etwa Osgood, Funktionentheorie 1. p. 55.

4) Wie es in der Theorie der mehrdeutigen Funktionen üblich ist. Vgl. Beispiel 1 in § 6.

Die Funktionen (5) bilden das sogenannte System von  $n$  unabhängigen Integralen. Jedes andere Integral ist von der Form

$$W = W(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}),$$

wobei  $W$  eine willkürliche Funktion von den  $\varepsilon_i$  bezeichnet.<sup>1)</sup> Die Periode  $T$  hängt von den Bahnkonstanten ab, ist also eine Funktion der ersten  $2n-1$  Integrale (5):

$$T = T(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n-1}).$$

In besonderen Fällen bleibt die Phasenverteilung in der Zeit ungeändert. Das sind die Fälle des statistischen Gleichgewichtes.

Notwendig und hinreichend dafür ist nach (2), daß  $\varrho = \varrho(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)$  der partiellen Differentialgleichung

$$(6) \quad \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varrho}{\partial q_i} \frac{\partial s}{\partial p_i} - \frac{\partial \varrho}{\partial p_i} \frac{\partial s}{\partial q_i} \right) = 0$$

genügt. Die allgemeine Lösung von (6) ist bekanntlich

$$\varrho = F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n-1}),$$

wo  $F$  eine willkürliche Funktion der  $2n-1$  ersten Integrale (5) bedeutet.

Um diesen Sachverhalt zu veranschaulichen, pflegt man von einer inkompressiblen Flüssigkeit zu sprechen, welche im Phasenraume mit der Dichte  $\varrho$  verteilt ist und deren Bewegung durch (1) beherrscht wird.

Der Fall eines mechanischen Systems von einem mechanischen Freiheitsgrade ist besonders einfach. Da die Energie das einzige, die Zeit explizit nicht enthaltende Integral ist, so fallen die Phasenkurven mit den Kurven konstanter Energie zusammen; dieselben sind, der Annahme 2. entsprechend, geschlossen.

1) Wenn sich die Energiefunktion unter den Integralen (5) nicht befindet, so ist sie, wie man sofort einsieht, eine Funktion der  $2n-1$  ersten  $\varepsilon_i$ :

$$s = s(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n-1}).$$

Wir wollen annehmen, daß hieraus mindestens ein  $\varepsilon_i$  sich eindeutig durch  $s$  und die übrigen  $\varepsilon_i$  ausdrückt. Es ist dann keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn man in (5) die Energiefunktion auftreten läßt.





welches wir kurz so schreiben wollen:

$$\int \varrho d\tau,$$

erstreckt über das Phasengebiet  $G$ :

$$\begin{cases} \varepsilon < \varepsilon & (q_1 \dots p_n) < \varepsilon & + \Delta \varepsilon, \\ \varepsilon_2 < \varepsilon_2 & (q_1 \dots p_n) < \varepsilon_2 & + \Delta \varepsilon_2, \\ \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{2n-1} < \varepsilon_{2n-1} & (q_1 \dots p_n) < \varepsilon_{2n-1} & + \Delta \varepsilon_{2n-1}. \end{cases}$$

Die hierdurch gegebene Begrenzung verhält sich bekanntlich, wie eine undurchlässige Wand: jedes Teilchen unserer fiktiven Flüssigkeit bleibt zu allen Zeiten innerhalb  $G$ , wenn es zur Zeit  $t=0$  in  $G$  war. Aus diesem Grunde ist, wenn  $\varrho'$  die Dichte der, *im statistischen Gleichgewichte* befindlichen, Verteilung bedeutet, in welche die ursprüngliche Verteilung vermöge (1) übergegangen ist:

$$(8) \quad \int_{(G)} \varrho d\tau = \int_{(G)} \varrho' d\tau.$$

Aus (8) folgt

$$(8^*) \quad \frac{\int_G \varrho d\tau}{\int_G d\tau} = \frac{\int_G \varrho' d\tau}{\int_G d\tau}.$$

Transformieren wir nun die  $q$  und  $p$  auf die  $\varepsilon$  und  $s$ . Vermöge (7\*) ist

$$\begin{aligned} \int_G \varrho d\tau &= \int_G \varrho \frac{\partial(q_1 \dots p_n)}{\partial(\varepsilon \dots s)} d\varepsilon d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_{2n-1} ds \\ &= \int_G \varrho D(\varepsilon, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n-1}) d\varepsilon \dots d\varepsilon_{2n-1} ds, \end{aligned}$$

$$\int d\tau = \int D(\varepsilon, \dots, \varepsilon_{2n-1}) d\varepsilon \dots d\varepsilon_{2n-1} ds;$$

wobei die Funktionaldeterminante  $D = \frac{\partial(q_1 \dots p_n)}{\partial(\varepsilon \dots s)}$ , wie weiter unten dargetan werden soll und in den obigen Formeln bereits angedeutet wurde, von  $s$  unabhängig ist.

Nach (6) ist überdies

$$\varrho' = \varrho'(\varepsilon, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n-1}).$$

Führen wir also den Grenzübergang:

$$\lim \Delta \varepsilon = 0, \quad \lim \Delta \varepsilon_2 = 0, \quad \dots \quad \lim \Delta \varepsilon_{2n-1} = 0$$

aus, so wird

$$\begin{aligned} \lim \frac{\int \varrho \, d\tau}{\int d\tau} &= \lim \frac{\int \varrho D(\varepsilon, \dots, \varepsilon_{2n-1}) \, d\varepsilon \dots d\varepsilon_{2n-1} \, d\varepsilon}{\int D(\varepsilon, \dots, \varepsilon_{2n-1}) \, d\varepsilon \dots d\varepsilon_{2n-1} \, d\varepsilon} \\ &= \frac{\int \varrho \, d\varepsilon}{\int d\varepsilon} = \varrho_s(\varepsilon, \dots, \varepsilon_{2n-1}). \end{aligned}$$

Ähnlich ergibt sich

$$\lim \frac{\int \varrho' \, d\tau}{\int d\tau} = \varrho'(\varepsilon, \dots, \varepsilon_{2n-1})$$

und demnach ist nach (8\*)

$$\varrho'(\varepsilon, \dots, \varepsilon_{2n-1}) = \varrho_s(\varepsilon, \dots, \varepsilon_{2n-1}),$$

was zu beweisen war.

Die Frage, ob die ursprüngliche Verteilung wirklich in die zu ihr konjugierte übergeht, d. h. ob sie gegen statistisches Gleichgewicht konvergiert, soll in den nächsten Paragraphen beantwortet werden. Ebenso einfach erledigt sich der Stabilitätssatz. Derselbe geht aus dem folgenden Theorem hervor, welches wir jetzt, unabhängig davon, ob die Annahme 2. von § 1 zutrifft oder nicht, beweisen wollen.

*Ist die Verteilungsdichte zur Zeit  $t=0$  von der konjugierten Dichte  $\varrho_s$  um nicht mehr als  $\eta$  verschieden, so ist sie es zu allen Zeiten.*

Zu beweisen ist also: wenn

$$(9) \quad |\varrho(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, 0) - \varrho_s(q_1, \dots, p_n)| < \eta$$

für alle  $q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n$ , so ist auch

$$(10) \quad |\varrho(q_1 \dots p_n, t) - \varrho_s(q_1 \dots p_n)| < \eta$$

für alle  $q_1, \dots, q_n, p_1 \dots p_n, t$ .

Betrachten wir irgendeinen festen Zeitpunkt  $t_0$  und irgendeinen festen Phasenpunkt  $q_1^0, \dots, p_n^0$ . Sei

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(t) \\ p_i &= p_i(t) \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

diejenige Phasenkurve, welche durch den Phasenpunkt  $q_1^0, \dots, p_n^0$  geht. Es sei ferner

$$\begin{aligned} q_i(0) &= a_i, & q_i(t_0) &= q_i^0 \\ p_i(0) &= b_i, & p_i(t_0) &= p_i^0 \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Die beiden Punkte  $q_1^0, \dots, p_n^0$  und  $a_1 \dots b_n$  liegen also auf derselben Phasenkurve. Nach (2) ist die substantielle Änderung der Dichte gleich Null; also:

$$(11) \quad \varrho(q_1^0 \dots p_n^0 t_0) = \varrho(a_1, \dots, b_n, 0).$$

Ferner folgt aus (7), daß die Kurven konstanter Dichte  $\varrho$ , mit den Bahnkurven zusammenfallen; demnach

$$(12) \quad \varrho_s(q_1^0 \dots p_n^0) = \varrho_s(a_1, \dots, b_n).$$

Aus (11), (12) und (9), wo wir anstatt der  $q, p$  die  $a, b$  setzen dürfen, folgt:

$$|\varrho(q_1^0 \dots p_n^0 t_0) - \varrho_s(q_1^0 \dots p_n^0)| < \eta$$

für alle  $q_1^0, \dots, p_n^0, t_0$ , was zu beweisen war.

### § 3. Der Fundamentalsatz für mechanische Systeme von einem Freiheitsgrade.

Bevor wir diesen Satz allgemein behandeln, wollen wir ihn für ein mechanisches System von einem mechanischen Freiheitsgrade beweisen. Die Ausdehnung der Beweismethode auf allgemeine mechanische Systeme wird rein formal von-statten gehen.

Die kanonischen Differentialgleichungen des zugrunde gelegten Systems lauten:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial q}.$$

Die Integration ergibt die einparametrische Phasenkurvenschar:

$$(13) \quad \begin{cases} q = q(t + \varepsilon_1, \varepsilon), \\ p = p(t + \varepsilon_1, \varepsilon), \end{cases}$$

wobei  $\varepsilon$  die Energiekonstante und  $\varepsilon_1$  die zweite Integrationskonstante bedeuten möge. Die beiden Annahmen, welche wir in § 1 getroffen haben, sollen bestehen. Nach (5) ist dann

$$(14) \quad \begin{cases} \varepsilon = f(q, p), \\ \varepsilon_1 = \varphi(q, p, t) = f_1(q, p) - t, \\ \Delta \equiv \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(q, p)} \equiv 0 \end{cases}$$

und nach den Ausführungen des ersten Paragraphen ist die Beziehung zwischen der Phasenebene und der  $\varepsilon, \varepsilon_1 + t$ -Ebene *eindeutig-stetig*. Man überlegt sich leicht, daß die Abbildung der Ebene  $p, q$  in der Ebene  $\varepsilon, \varepsilon_1 + t$  einen Streifen von der Breite  $T = T(\varepsilon)$  bildet (Fig. 1). Es ist ersichtlich keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir den unteren Rand des Streifens geradlinig nehmen und in die  $\varepsilon$ -Achse verlegen.

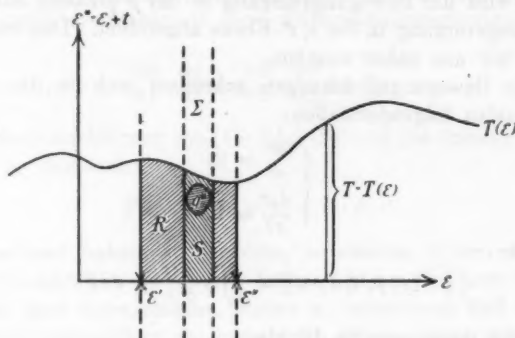


Fig. 1.

Der Fundamentalsatz für eine statistische Gesamtheit von mechanischen Systemen mit einem mechanischen Freiheitsgrade lautet präzisiert folgendermaßen:

Bedeute  $g$  ein beliebiges Flächenstück in der Phasenebene. Sei  $\varrho = \varrho(q, p, 0)$  die zur Zeit  $t = 0$  herrschende Dichte;  $\varrho_s$  die zu  $\varrho$  konjugierte Dichte. Mit diesen Bezeichnungen ist

$$(15) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \iint_{(g)} \varrho(q, p, t) dq dp = \iint_{(g)} \varrho_s(q, p) dq dp,$$

es sei denn, daß

$$T'(\varepsilon) = \frac{dT(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0,$$

in welchem Falle die ursprüngliche Verteilung periodisch mit der Periode  $T$  wiederkehrt.<sup>1)</sup>

Der Fall  $T(\varepsilon) = \text{const.}$  ist trivial und man sieht ohne jede Rechnung sofort ein, daß in diesem Falle die ursprüngliche Verteilung periodisch mit der Periode  $T$  wiederkehrt und demnach von der Konvergenz keine Rede ist. Im folgenden nehmen wir also an, daß  $T'$  nicht identisch verschwindet.

Den Beweis beginnen wir mit einer Transformation, welche der Klarheit halber in zwei Schritten ausgeführt werden soll. Zunächst transformieren wir die  $p, q$  Koordinaten auf die Koordinaten  $\varepsilon, \varepsilon^* = \varepsilon_1 + t$  mit den Transformationsgleichungen (14). Vermöge dieser Transformation, welche wir schon besprochen haben, wird der Bewegungsvorgang in der  $p, q$ -Ebene auf einen Bewegungsvorgang in der  $\varepsilon, \varepsilon^*$ -Ebene abgebildet. Den letzteren wollen wir uns näher ansehen.

Die Bewegungsgleichungen schreiben sich in den neuen Koordinaten folgendermaßen:

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dt} = 0, \\ \frac{d\varepsilon^*}{dt} = 1. \end{cases}$$

Da

$$\iint \varrho(p, q, t) dp dq = \iint \varrho \frac{\partial(p, q)}{\partial(\varepsilon, \varepsilon^*)} d\varepsilon d\varepsilon^*,$$

so ist die transformierte Dichte

$$(18) \quad F(\varepsilon, \varepsilon^*, t) = \varrho(p, q, t) D$$

1) Aus (15) folgt:

$$\lim_{g=0} \left( \lim_{t=\infty} \frac{\int g}{\int d\tau} \right) = q,$$

wobei der Grenzübergang in angedeuteter Aufeinanderfolge ausgeführt werden soll. Geht man in umgekehrter Reihenfolge zur Grenze über, so existiert kein Limes, wie aus (2) zu entnehmen ist. Vgl. J. W. Gibbs, l. c. p. 144 (146).

unter  $p, q$  die Funktionen (13) und unter  $D$  die Funktionaldeterminante verstanden. Die Funktionaldeterminante ist eine Funktion nur von  $\varepsilon$ :

$$(19) \quad \frac{\partial D}{\partial \varepsilon^*} = 0.$$

Um dieses einzusehen betrachten wir das Doppelintegral

$$(20) \quad \iint dq dp = \iint D d\varepsilon d\varepsilon^*,$$

welches eine Integralinvariante der kanonischen Differentialgleichungen ist. Es ist ebenfalls

$$(21) \quad \iint d\varepsilon d\varepsilon^*,$$

wie man unmittelbar aus (17) ersieht, eine Integralinvariante. Also ist, da dieses für beliebig kleine Gebiete besteht, die Funktionaldeterminante  $D$  eine Differentialinvariante; d. h. es ist

$$\frac{\partial D}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon^*} \frac{d\varepsilon^*}{dt} = 0.$$

Unter Berücksichtigung von (17) folgt (19) und die transformierte Dichte ist demnach:

$$(22) \quad F(\varepsilon, \varepsilon^*, t) = \varrho(p, q, t) \cdot D(\varepsilon).$$

*Stillschweigend* haben wir Gebiete, in welchen  $\Delta$  verschwindet, ausgeschlossen. Der Einfachheit halber und um fürs erste Singularitäten ganz auszuschließen, wollen wir annehmen, daß unsere statistische Gesamtheit ein invariantes Phasengebiet erfüllt, in welchem  $\Delta$  nirgends verschwindet. Die Abbildung ergibt dann ein Streifenstück  $R$  etwa von der Länge  $\varepsilon'' - \varepsilon'$  und

$$\frac{1}{D} \neq 0, \quad \varepsilon' \leq \varepsilon \leq \varepsilon''.$$

Der Bewegungsvorgang in der  $\varepsilon, \varepsilon^*$ -Ebene beruht, nach dem bisher Gesagten, auf einer geradlinigen Strömung (der zur Zeit  $t = 0$  mit der Dichte  $F(\varepsilon, \varepsilon^*, 0)$  verteilt) und das Gebiet  $R$  erfüllenden Flüssigkeit) parallel zur  $\varepsilon^*$ -Achse.

Wollten wir diesen Bewegungsvorgang analytisch weiter verfolgen, so würde es sich als notwendig erweisen, die Dichtig-

keitsfunktion  $F(\varepsilon, \varepsilon^*, 0)$ , welche zunächst, nach unseren Festsetzungen, in  $R$  definiert ist, in der  $\varepsilon, \varepsilon^*$ -Ebene *periodisch*, mit der Periode  $T$ , aus  $R$  hinaus nach unten *fortzusetzen* (da die Bewegung nach oben vor sich geht) und die Ebene entsprechend mit Flüssigkeit zu füllen; sonst würde, nach einer gewissen Zeit, aus unserem, auf die  $\varepsilon, \varepsilon^*$ -Ebene abgebildeten, Phasenraume  $R$  die Flüssigkeit verschwunden sein.

Um den Fundamentalsatz für ein Gebiet  $g$  in der  $p, q$ -Ebene zu beweisen, werden wir das entsprechende Gebiet  $g^*$  in der  $\varepsilon, \varepsilon^*$ -Ebene betrachten, in welches  $g$  vermöge unserer Transformation übergeht. Ist  $\Sigma$  (Fig. 1) der Streifen, welcher  $g^*$  ganz enthält, so ist der Bewegungsvorgang außerhalb  $\Sigma$  ganz *ohne Belang*, sofern uns die zeitliche Änderung des Inhaltes von  $g^*$ , die wir jetzt zu betrachten haben werden, angeht; da die Begrenzung von  $\Sigma$  sich wie eine undurchlässige Wand verhält, wie aus (17) ersichtlich.

Es wird für uns *recht bequem* sein und der Periodizitätscharakter, welcher für die folgenden Überlegungen *wesentlich* ist, wird *klarer hervortreten*, wenn wir die  $\varepsilon, \varepsilon^*$ -Koordinaten auf Polarkoordinaten  $r, \varphi$  transformieren, welche mit den  $\varepsilon, \varepsilon^*$ -Koordinaten durch die Gleichungen:

$$(23) \quad \begin{cases} T(\varepsilon) = 2\pi r, \\ \varepsilon^* = r \cdot \varphi \end{cases}$$

verknüpft sind.  $T$  bedeutet die Periode und ist eine Funktion nur von  $\varepsilon$ . Wir wollen zunächst annehmen, daß  $T$  eine stetige, mit stetigen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung ausgerüstete Funktion von  $\varepsilon$  ist und daß die *erste Ableitung nirgends verschwindet*. Wie weit wir uns von dieser Annahme befreien dürfen, soll später untersucht werden.

Vermöge dieser Festsetzung ist die Abbildung des Streifenstückes  $S$  auf die  $r, \varphi$ -Ebene *eindeutig*. Diese Abbildung ist ersichtlich ein Kreisring. Aus (23) folgt durch Differentiation nach der Zeit

$$(24) \quad \begin{cases} T'(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{dt} = 2\pi \frac{dr}{dt}, \\ \frac{d\varepsilon^*}{dt} = \varphi \frac{dr}{dt} + r \frac{d\varphi}{dt}. \end{cases}$$



Unter Berücksichtigung von (17) ist also

$$r = \text{const.},$$

$$r \frac{dq}{dt} = 1,$$

d. h. die Flüssigkeit strömt in Kreisen mit zeitlich konstanter Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{1}{r}.$$

Die Dichte transformiert sich folgendermaßen:

$$\iint F dt ds^* = \iint F \frac{\partial (s s^*)}{\partial (r, \varphi)} dr d\varphi = \iint \frac{2\pi F}{T} r dr d\varphi.$$

Die transformierte Dichte ist also:

$$(25) \quad \sigma = \sigma(r, \varphi, t) = \frac{2\pi}{T} F$$

Im Endresultat haben wir demnach die Bewegung einer mit der Dichte  $\sigma = \sigma(r, \varphi, t)$  verteilten Flüssigkeit, welche in konzentrischen Kreisen mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 1/r$  strömt, zu betrachten und zu beweisen ist, wie man sofort aus (15), (18), (25) entnimmt:

$$(26) \quad \lim_{t \rightarrow \infty (\gamma)} \iint \sigma d\sigma = \iint_{(\gamma)} \sigma_s d\sigma,$$

wobei  $\gamma$  die Phasenausdehnung, welche vermöge (23) aus  $g^*$  hervorgeht, und  $\sigma_s$  die zu  $\sigma$  konjugierte Dichte bedeutet:

$$(27) \quad \sigma_s = \frac{\int \sigma ds}{\int ds} = \frac{\int_0^{2\pi} \sigma(r, \varphi) r d\varphi}{\int_0^{2\pi} r d\varphi} = \frac{\int_0^{2\pi} \sigma(r, \varphi) d\varphi}{2\pi}.$$

Wir wollen nun dieses reduzierte Problem, etwas verallgemeinert, behandeln.

#### § 4. Das reduzierte Problem.<sup>1)</sup>

Wir denken uns in der Ebene eine kontinuierliche, einen Kreisring erfüllende Gesamtheit von Punkten, welche sich auf

1) Dieses Problem untersucht Poincaré in einer nicht einwandfreien Weise und nach anderer Methode, als der in § 4 entwickelten. Vgl. Poincaré, Journ. de Phys. 1906; Calcul des probabilités 1896 und Borel Calcul d. prob. 1909. p. 124.

konzentrischen Kreisen um den Nullpunkt mit einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \omega(r)$ , Funktion nur von  $r$ , bewegen. Wir nehmen an, daß die erste Ableitung von  $\omega : \omega' = \omega'(r)$  nirgends im Kreisringe verschwindet. Für jedes Individuum der Menge ist

$$(28) \quad \begin{cases} r = r(t) = \text{const.} = r_0, \\ \varphi = \varphi(t) = \omega t + \varphi_0, \end{cases}$$

wenn  $r_0, \varphi_0$  die Koordinaten sind, welche die Lage des Teilchens zur Zeit  $t = 0$  angeben.

Sei die Verteilungsdichte zur Zeit  $t = 0$ :

$$\sigma = \sigma(r, \varphi).$$

Diese Dichte wird sich im allgemeinen in jedem Punkte  $r, \varphi$  mit der Zeit ändern und dementsprechend eine Funktion von  $r, \varphi, t$  sein

$$(29) \quad \begin{cases} f(r, \varphi, t), \\ f(r, \varphi, 0) = \sigma(r, \varphi). \end{cases}$$

Nun ist, wenn  $g_0$  irgendein Gebiet zur Zeit  $t = 0$  bedeutet und  $g$  dasjenige Gebiet ist, welches aus  $g_0$  vermöge der Bewegung (28) zur Zeit  $t$  hervorgegangen ist,

$$(30) \quad \iint_{(g_0)} r_0 dr_0 d\varphi_0 = \iint_{(g)} r \frac{\partial(r_0, \varphi_0)}{\partial(r, \varphi)} dr d\varphi = \iint_{(g)} r dr d\varphi$$

und

$$(31) \quad \iint_{(g_0)} \sigma(r_0, \varphi_0) r_0 dr_0 d\varphi_0 = \iint_{(g)} f(r, \varphi, t) r dr d\varphi.$$

Da (30) und (31) für beliebig kleine Flächenstücke gelten, so folgt unmittelbar

$$(32) \quad \sigma(r_0, \varphi_0) = f(r, \varphi, t),$$

wobei die mit dem Index 0 versehenen Koordinaten und diejenigen ohne Index durch die Gleichungen (28) verknüpft sind. (32) besteht für alle  $r, \varphi, t$ . Also ist:

$$(33) \quad \sigma(r_0, \varphi_0) = \sigma(r, \varphi - \omega t) = f(r, \varphi, t).$$

Um den durch (26) ausgedrückten Satz zu beweisen, entwickeln wir  $\sigma = \sigma(r_0, \varphi_0)$  in eine Fourierreihe nach Vielfachen von  $\varphi_0$

$$(34) \quad \sigma(r, \varphi_0) = a_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m(r) \cos m \varphi_0 + b_m(r) \sin m \varphi_0);$$

$$(35) \quad \begin{cases} a_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(r, x) dx, \\ a_m(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(r, x) \cos mx dx, \\ b_m(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(r, x) \sin mx dx. \end{cases} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Betrachten wir zur Zeit  $t$  den Masseninhalt irgendeines Flächenstückes  $g$  in unserem Kreisinge. Nach (33) und (34) ist derselbe

$$(36) \quad \begin{aligned} \iint_{(g)} \sigma(r, \varphi - \omega t) r dr d\varphi &= \iint_{(g)} \sigma(r, \varphi - \omega t) do \\ &= \iint_{(g)} a_0(r) do + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \iint_{(g)} a_m(r) \cos m(\varphi - \omega t) do \right. \\ &\quad \left. + \iint_{(g)} b_m(r) \sin m(\varphi - \omega t) do \right). \end{aligned}$$

Nach (27) und (35) ist also

$$\iint_g \sigma(r, \varphi - \omega t) do = \iint_g \sigma_s(r, \varphi) do = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m + B_m),$$

wenn  $A_m$  das erste Integral unter der Summe in (36) bedeutet, und  $B_m$  das zweite.

Nun ist die Fläche  $g$  ein Kreis, der den Kreis  $K$  enthält. Der Flächeninhalt  $A_m$  ist also

folglich:

$$\begin{aligned}
 A_m &= -\frac{1}{m^2 t} \cdot \iint_g \frac{a_m(r) \cdot r}{\omega'} \frac{\partial \sin m(\varphi - \omega t)}{\partial r} dr d\varphi \\
 &= +\frac{1}{m^2 t} \iint_g \frac{a_m(r) \cdot r}{\omega'} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \cos m(\varphi - \omega t) \right) dr d\varphi \\
 &= \frac{1}{m^2 t} \iint_g \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{a_m(r) \cdot r}{\omega'} \frac{\partial}{\partial r} \cos m(\varphi - \omega t) \right) d\varphi dr \\
 &= \frac{1}{m^2 t} \left\{ \int_{R_1}^{R_2} \frac{a_m \cdot r}{\omega'} \frac{\partial}{\partial r} \cos m(\varphi_2(r) - \omega \cdot t) dr \right. \\
 &\quad \left. - \int_{R_1}^{R_2} \frac{a_m \cdot r}{\omega'} \frac{\partial}{\partial r} \cos m(\varphi_1(r) - \omega \cdot t) \cdot dr \right\} \\
 (37) \quad &= \frac{1}{m^2 t} \left\{ - \int_{R_1}^{R_2} \cos m(\varphi_2(r) - \omega \cdot t) \cdot \frac{d}{dr} \left( \frac{a_m \cdot r}{\omega'} \right) dr \right. \\
 &\quad \left. + \int_{R_1}^{R_2} \frac{d}{dr} \left( \frac{a_m \cdot r}{\omega'} \cos m(\varphi_2 - \omega \cdot t) \right) dr \right. \\
 &\quad \left. + \int_{R_1}^{R_2} \cos m(\varphi_1(r) - \omega \cdot t) \frac{d}{dr} \left( \frac{a_m \cdot r}{\omega'} \right) dr \right. \\
 &\quad \left. - \int_{R_1}^{R_2} \frac{d}{dr} \left( \frac{a_m \cdot r}{\omega'} \cos m(\varphi_1 - \omega t) \right) dr \right\} \\
 &= \frac{1}{m^2 t} \left\{ \int_{R_1}^{R_2} \cos m(\varphi_1(r) - \omega t) \frac{d}{dr} \left( \frac{a_m \cdot r}{\omega'} \right) dr \right. \\
 &\quad \left. - \int_{R_1}^{R_2} \cos m(\varphi_2(r) - \omega t) \cdot \frac{d}{dr} \left( \frac{a_m \cdot r}{\omega'} \right) dr \right\}.
 \end{aligned}$$

Dabei ist die Integration nach  $r$  von  $r = R_1$  bis  $r = R_2$  zu erstrecken, wobei  $R_1$  den inneren,  $R_2$  den äußeren Radius des Kreisringes bedeuten, welcher das Element  $g$  ganz im Innern enthält. Der Einfachheit halber haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß die konzentrischen Kreise den Rand des Gebietes höchstens in zwei Punkten schneiden.

Sei im Integrationsintervalle  $M$  die obere Schranke von  $\left| \frac{d}{dr} \left( \frac{a_m \cdot r}{\omega'} \right) \right|$ :

$$(38) \quad \left| \frac{d}{dr} \left( \frac{a_m(r) \cdot r}{\omega'(r)} \right) \right| \leq M, \quad \text{für alle } R_1 \leq r \leq R_2.$$

Es ist dann, da  $|\cos| \leq 1$ :

$$\left| \int_{R_1}^{R_2} \cos m(\varphi_1(r) - \omega \cdot t) \frac{d}{dr} \left( \frac{a_m \cdot r}{\omega'} \right) dr \right| \leq M \int_{R_1}^{R_2} dr = M(R_2 - R_1).$$

Wir haben also nach (37)

$$|A_m| \leq \frac{2}{m^2 t} M(R_2 - R_1)$$

und ähnlich

$$|B_m| \leq \frac{2}{m^2 t} M(R_2 - R_1).$$

Demnach ist

$$(39) \quad \left| \iint_g f d\sigma - \iint_g \sigma_s d\sigma \right| \leq \frac{4M(R_2 - R_1)}{t} \sum_1^\infty \frac{1}{m^2} \leq \frac{8M}{t} R_2 \frac{\pi^2}{6},$$

woraus sofort die Konvergenz folgt. In unserem Falle ist nach § 3

$$\omega = \frac{1}{r},$$

folglich

$$(40) \quad \frac{d}{dr} \left( \frac{a_m(r) \cdot r}{\omega'} \right) = - \frac{d}{dr} (a_m(r) \cdot r^2) = - r^2 \frac{da_m(r)}{dr} - 3 a_m(r) \cdot r^2,$$

$$\left| \frac{d}{dr} \left( \frac{a_m(r) \cdot r}{\omega'} \right) \right| \leq R_2^3 \left| \frac{da_m(r)}{dr} \right| + 3 R_2^2 |a_m(r)|.$$

Ferner ist nach (25) und (22) und (29)

$$(41) \quad \sigma = \frac{2\pi}{T'(\varepsilon)} \varrho(\varepsilon, \varepsilon^*, 0) D(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon, \varepsilon^*),$$

also

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = - \frac{2\pi}{(T')^2} \varrho \cdot D \cdot T'' \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{2\pi}{T'} \varrho \cdot D' \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{2\pi}{T'} D \left( \frac{\partial \varrho}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial \varrho}{\partial \varepsilon^*} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial r} \right)$$

und nach (23)

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial r} &= 4\pi^2 \left\{ -\varrho \cdot D \cdot \frac{T''}{(T')^2} + \varrho \cdot D' \cdot \frac{1}{(T')^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{D}{T'^2} \left( \frac{\partial \varrho}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \varrho}{\partial \varepsilon^*} \varepsilon^* \cdot \frac{T'}{T} \right) \right\} = \Phi(\varepsilon, \varepsilon^*). \end{aligned} \right.$$

Hierbei bedeutet  $\varrho$  die Phasenverteilung zur Zeit  $t = 0$ .

Nach Einsetzung der Funktionen (14) für  $\varepsilon$  und  $\varepsilon^*$  gehen  $\varphi$  und  $\Phi$  in gewisse Funktionen von  $p, q$  über.

Es sei nun innerhalb  $g$  in der Phasenebene  $q, p$ :

$$(43) \quad |\Phi(\varepsilon, \varepsilon^*)| = |\Phi^*(q, p)| \leq \mu,$$

$$(44) \quad \frac{1}{2\pi} \cdot T(\varepsilon) \leq T_0$$

und

$$(45) \quad |\varphi(\varepsilon, \varepsilon^*)| \leq \nu,$$

wobei  $\mu, T_0, \nu$  drei Konstanten bedeuten. Alsdann ist nach (35), (42) und (43)

$$(46) \quad \left| \frac{da_m}{dr} \right| \leq 2\mu$$

und wegen (35), (41), (45):

$$(47) \quad |a_m| \leq 2\nu.$$

Folglich haben wir nach (40), (44), (23)

$$(48) \quad \left| \frac{d}{dr} \frac{a_m \cdot r}{\omega'} \right| \leq 2T_0^3 \mu + 6T_0^2 \nu.$$

Daher nach (38), (39), (48):

$$(49) \quad \left| \iint_g \varphi(q, p, t) d\sigma - \iint_g \varphi_s(q, p) d\sigma \right| \leq \frac{k_1 T_0^4 \mu + k_2 T_0^3 \nu}{t} = \frac{N}{t},$$

unter  $k_1, k_2$  zwei Zahlenfaktoren und unter  $N$  den Zähler des Bruches verstanden, woraus sofort (15) folgt.

Wir haben vorausgesetzt, daß die Funktionaldeterminante  $\Delta$  und  $T'(\varepsilon)$  nirgends verschwinden, sonst haben die Funktionen  $D(\varepsilon)$

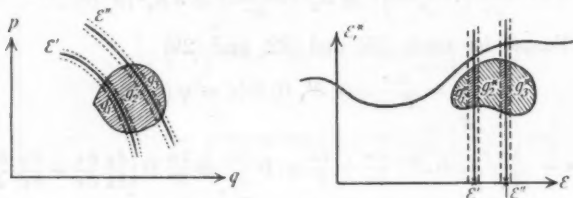


Fig. 2.

und  $1/T'(\varepsilon)$  singuläre Punkte. Sind dieselben in endlicher Anzahl vorhanden, etwa in der Zahl 2, so wird man die beiden Phasenkurven, welche den singulären Werten  $\varepsilon', \varepsilon''$  entsprechen, je mit einer Stromröhre umgeben. Das Gebiet  $g$  zerfällt

dann (Fig. 2) in die beiden schraffierten Gebiete und in  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$ ; auf  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  lassen sich die obigen Überlegungen anwenden:

$$\left| \iint_{(g_1+g_2+g_3)} \varrho(q, p, t) d\omega - \iint_{(g_1+g_2+g_3)} \varrho_s(q, p) d\omega \right| \leq \frac{N}{t}.$$

Da nun sowohl die schraffierten Gebiete als auch die Integralanteile, die sie ergeben, beliebig klein gemacht werden können, so besteht noch (15) für das Gebiet  $g$ . — Ebenso verhält es sich in allgemeinen Fällen, sogar auch dann, wenn die Singularitäten eine Menge mit diskret verteilten Häufungsstellen bilden.

Bevor wir den Fundamentalsatz, der hiermit nur für ein mechanisches System von einem mechanischen Freiheitsgrade erledigt wurde, allgemein beweisen, wollen wir eine gewisse Funktion der Zeit studieren, welche in der mechanischen Theorie der Thermodynamik von Gibbs die Rolle der Entropie spielt. Wir werden dabei noch immer unseren einfachen Fall eines mechanischen Systems von einem mechanischen Freiheitsgrade zugrunde legen.

### § 5. Die Entropie.

Sei eine statistische Gesamtheit von mechanischen Systemen mit einem mechanischen Freiheitsgrade mit der Dichte  $\varrho = \varrho(p, q, t)$  verteilt.

Betrachten wir das Integral

$$E(t) = \iint \varrho \log \varrho d\omega$$

erstreckt über die ganze Ebene.

Aus (2) folgt, daß

$$\frac{dE}{dt} = 0,$$

also

$$E = \text{const.},$$

ganz unabhängig davon, ob die Gesamtheit im statistischen Gleichgewichte ist, oder nicht.

Betrachten wir nun in der  $q, p$ -Ebene ein beliebiges, endlich großes Gebiet  $R$ , begrenzt durch eine Energiekurve. Die Fläche innerhalb  $R$  teilen wir in kleine Elemente. Sei  $k$

die Anzahl dieser Zellen. Definieren wir jetzt eine Funktion  $P = P(q, p, t)$  folgendermaßen.

Innerhalb der  $i^{\text{ten}}$  Zelle soll  $P$  den konstanten Wert

$$(50) \quad P_i = \frac{\iint q(p, q, t) do}{\iint do} = \frac{m_i}{f_i}$$

haben, wobei die beiden Doppelintegrale über die  $i^{\text{te}}$  Zelle zu erstrecken sind;  $m_i$  bedeutet ihre Masse zur Zeit  $t$ ,  $f_i$  ihren Flächeninhalt. Damit ist also  $P = P(q, p, t)$ , als unstetige Funktion von  $q, p$  und als stetige Funktion von  $t$  definiert.

Ganz ähnlich definieren wir, unter Zugrundelegung desselben Zellsystems und der zu  $q$  konjugierten Dichte  $p$ , die Funktion  $P_p$ , indem wir fordern, daß in der  $i^{\text{ten}}$  Zelle  $P_p$  den konstanten Wert

$$(51) \quad P_{p,i} = \frac{\iint p(q, p) do}{\iint do} = \frac{m_{p,i}}{f_i}$$

habe.  $P_p$  ist eine unstetige Funktion von  $q$  und  $p$  und ist explizit von  $t$  unabhängig.

Betrachten wir jetzt die beiden über das Gebiet  $R$  zu erstreckenden Doppelintegrale

$$(52) \quad \begin{cases} G(t) = \iint P \log P do, \\ G_p = \iint P_p \log P_p do, \end{cases}$$

wobei  $P$  und  $P_p$  die durch (50) bzw. (51) definierten Funktionen sind.

Aus (49) folgt sofort, daß

$$(53) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = G_p.$$

Um näheren Aufschluß über diesen Konvergenzvorgang zu erhalten, betrachten wir die Funktion

$$(54) \quad F(P) = P \log P.$$

Das erste Integral in (52) drückt sich durch die  $k$ -gliedrige Summe

$$(55) \quad G(t) = \sum F(P) f$$

aus.



Berücksichtigen wir, daß

$$(56) \quad \begin{cases} F(P) = F(P_s) + F'(P + \theta(P - P_s)) \cdot (P - P_s), \\ 0 < \theta < 1, \end{cases}$$

wobei  $F'$  die erste Ableitung von  $F = F(P)$  bedeutet, so folgt aus (55), (54) und (56)

$$G(t) = G_s + \sum [(P - P_s) \{1 + \log(P + \theta(P - P_s))\} f].$$

Nun ist

$$\log(P + \theta(P - P_s)) < P + \theta(P - P_s)$$

und

$$P \cdot f = m,$$

also

$$|G(t) - G_s| \leq \sum [|m - m_s| |1 + P + \theta(P - P_s)|].$$

Sei zur Zeit  $t = 0$  an allen Stellen

$$\varrho \leq \eta.$$

Nach § 2 gilt dann diese Ungleichung für alle Zeiten; demnach ist

$$|G(t) - G_s| \leq (1 + 2\eta) \sum |m - m_s|$$

und nach (49)

$$(59) \quad |G(t) - G_s| \leq (1 + 2\eta) \sum_i \frac{N}{i}.$$

Vorausgesetzt ist dabei, daß in  $R$   $\Delta$  und  $T''(s)$  nirgends verschwinden. Aus (59) folgt sofort (53).

Kommen in  $R$  Nullstellen von  $\Delta$  oder  $T''(s)$  vor, so wird man ähnlich vorgehen, wie zuletzt in § 4. Man wird zunächst gewisse Gebiete, die man beliebig klein machen kann, ausschließen und die Konvergenz, welche der Satz (53) behauptet, für das Gebiet  $R$  feststellen können.

Das Gebiet  $R$  kann beliebig groß gemacht werden. Man sieht daraus sofort, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \iint P \log P \, d\sigma = \iint P_s \log P_s \, d\sigma,$$

wobei die beiden Doppelintegrale über die ganze Ebene zu erstrecken sind.

Vorausgesetzt ist dabei, daß

$$\iint P \log P \, d\sigma$$

erstreckt über die ganze Ebene einen Sinn hat.

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß

$$G_s < G(0),$$

sobald die einzelnen Zellen genügend klein genommen werden.

Auf dieses Problem und ähnliche Fragestellungen, die sich an die Funktionen  $E$  und  $G$  knüpfen, wollen wir weiter nicht eingehen.<sup>1)</sup>

### § 6. Beispiele.

Wir gehen nun dazu über, die obigen allgemeinen zwei-dimensionalen Ausführungen mit einigen illustrativen Beispielen zu belegen.

#### 1. Quasielastische eindimensionale Schwingung.

Die Differentialgleichung der Bewegung lautet

$$(60) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -n^2 x, \quad n \neq 0,$$

wenn die Masse des schwingenden Punktes gleich 1 ist ( $n$  bedeutet eine Konstante); oder wenn wir kanonisch transformieren, in der üblichen Bezeichnung

$$\frac{dp}{dt} = -n^2 q,$$

$$\frac{dq}{dt} = p.$$

Die Integration ergibt

$$(61) \quad \begin{cases} q = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{n} \sin(n t + \varepsilon_1), \\ p = \sqrt{2\varepsilon} \cos(n t + \varepsilon_1); \end{cases}$$

$\varepsilon$  ist die Energiekonstante, und  $\varepsilon_1$  die 2<sup>te</sup> willkürliche Konstante; die Wurzel ist positiv verstanden.

Aus (61) folgt

$$\frac{p^2}{2} + \frac{n^2 q^2}{2} = \varepsilon,$$

$$\arcsin\left(\frac{n}{\sqrt{2\varepsilon}} q\right) = n t + \varepsilon_1.$$

1) Vgl. P. u. T. Ehrenfest, l. c.

Die beiden Annahmen von § 1 sind also erfüllt. Man sieht auch unmittelbar ein, daß, obwohl  $\arcsin$  mehrdeutig ist, sich doch eine eindeutige stetige Beziehung zu allen Zeiten zwischen der  $pq$ -Ebene und  $\varepsilon, \varepsilon_1$ -Ebene herstellen läßt, indem wir z. B. jedem

$$x = \frac{n}{\sqrt{2\varepsilon}} q; \quad -1 < x < 1,$$

denjenigen Wert von  $\arcsin x$  zuordnen, welcher zwischen  $-\pi/2$  und  $\pi/2$  liegt. Die  $p, q$ -Ebene wird auf einen Streifen von der Dicke  $\pi$  parallel der  $\varepsilon$ -Achse abgebildet.

Die Periode der Schwingung ist:

$$T = \frac{2\pi}{n},$$

also

$$T = 0$$

und demnach weist eine statistische Gesamtheit von quasielastischen Schwingungen keine Tendenz zur Annäherung an statistisches Gleichgewicht auf: die anfangs gegebene Verteilung wiederholt sich periodisch mit der Periode  $T = 2\pi/n$ .

## 2. Unendlich kleine eindimensionale Schwingungen.

Das obige Beispiel führt uns auf eine große Gruppe von mechanischen Systemen, für welche der Satz von der Annäherung an statistisches Gleichgewicht nicht besteht. Es sind dies die *unendlich kleinen Schwingungen*, deren Differentialgleichung bekanntlich auch von der Form der eben betrachteten (60) ist.

## 3. Pendel.

Wir betrachten ein einfaches Pendel mit *endlichen* Schwingungen.<sup>1)</sup> Die kanonischen Differentialgleichungen sind, in üblicher Bezeichnung:

$$\frac{dp}{dt} = m g a \sin q,$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{p}{m a^2}.$$

1) Vgl. E. Whittaker, *Analytic Dynamics*, Cambridge 1904. p. 71.

Die Integration ergibt

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2ma^2} - mga \cos q,$$

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \int_{\frac{1}{k} \sin \frac{q}{2}}^{\frac{1}{k} \sin \frac{q}{2}} \frac{dy}{\sqrt{(1-k^2 y^2)(1-y^2)}},$$

wobei  $\varepsilon$  und  $\varepsilon_1$  die beiden Integrationskonstanten sind und  $k$  die folgende Funktion von  $\varepsilon$  ist

$$k = \frac{1}{2a} \left( \frac{\varepsilon}{mg} + a \right).$$

Wir betrachten eine statistische Gesamtheit, welche mit irgend-einer Dichtigkeitsfunktion das durch die Energiekurve

$$\varepsilon(p, q) = \text{const.} = c < mga$$

begrenzte Gebiet  $G$  erfüllt.

Aus bekannten Eigenschaften der elliptischen Funktionen folgt, daß die beiden Annahmen von § 1 erfüllt sind. Die Periode

$$T = 4 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}$$

ist eine eindeutig stetige Funktion der Energie. Ferner ist

$$T'(\varepsilon) \equiv 0.$$

Für endliche Pendelschwingungen besteht also im Gebiete  $G$  die Konvergenz nach dem Zustande statistischen Gleichgewichtes. Ferner ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \iint_{(G)} P \log P \, d\sigma = \iint_{(G)} P_s \log P_s \, d\sigma.$$

### § 7. Der Fundamentalsatz für mechanische Systeme von $n$ Freiheitsgraden.

Wir gehen jetzt dazu über, den Fundamentalsatz allgemein, d. h. für mechanische Systeme von  $n$  Freiheitsgraden auszusprechen und zu beweisen. Die Grundgleichungen und Postulate für den Beweis wurden im § 1 präzisiert.

Bedeutet  $g$  eine beliebige Phasenausdehnung im  $2n$ -fach dimensionalen Phasenraume. Sei  $\varrho = \varrho(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n, 0)$  die zur Zeit  $t=0$  herrschende Phasendichte und  $\varrho_s = \varrho_s(q_1 \dots q_n)$  die zu  $\varrho$  konjugierte Dichte. Mit diesen Bezeichnungen ist

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} \int \dots \int_{(g)} \varrho(q_1 \dots p_n, t) dq_1 \dots dp_n \\ = \int \dots \int_{(g)} \varrho_s(q_1 \dots p_n) dq_1 \dots dp_n, \end{array} \right.$$

es sei denn, daß  $T = T(\varepsilon, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n-1})$  eine Konstante ist.

Den Beweis führen wir ähnlich wie in § 3. Wir transformieren zunächst die Koordinaten  $q_1, \dots, p_n$  auf die Koordinaten  $\varepsilon, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n}^* = \varepsilon_{2n} + t$ .

Die Bewegungsgleichungen schreiben sich in den neuen Koordinaten folgendermaßen:

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varepsilon}{dt} = 0, \\ \frac{d\varepsilon_2}{dt} = 0, \\ \dots \\ \frac{d\varepsilon_{2n}^*}{dt} = 1. \end{array} \right.$$

Die transformierte Dichte ist

$$F(\varepsilon, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n}^*) = \varrho(q_1 \dots p_n, t) \frac{\partial(q_1 \dots p_n)}{\partial(\varepsilon, \dots, \varepsilon_{2n}^*)}.$$

Man beweist, ähnlich wie in § 3, daß die Funktionaldeterminante nur von den  $2n-1$  ersten Integralen abhängt; demnach ist

$$(63) \quad F(\varepsilon, \dots, \varepsilon_{2n}^*) = \varrho(q_1 \dots p_n, t) \cdot D(\varepsilon, \dots, \varepsilon_{2n-1}).$$

Sei nun  $g$  die Phasenausdehnung, für die wir den Satz beweisen wollen, und  $g^*$  bedeute diejenige Phasenausdehnung im  $2n$ -fach dimensionalen Integralraume, in welche (vermöge unserer Transformation)  $g$  übergeht. Wir betrachten die Funktion (63) innerhalb  $g$ , in ihrer Abhängigkeit von  $\varepsilon_{2n}^*$  und von irgendeinem Integrale unter den  $2n-1$  ersten etwa von  $\varepsilon$ :

$$F(\varepsilon, \varepsilon_2^0, \varepsilon_3^0, \dots, \varepsilon_{2n-1}^0, \varepsilon_{2n}^*) = f(\varepsilon, \varepsilon_{2n}^*),$$

wobei die Veränderlichen  $\varepsilon, \varepsilon_{2n}^*$  auf ein gewisses geschlossenes Gebiet  $\gamma$  beschränkt sind und die  $\varepsilon_i$  mit oberem Index 0 konstante Werte bedeuten.

Nun sieht man, ähnlich wie in § 3, daß

$$\frac{D F}{D t} = 0.$$

Also ist auch

$$\frac{D f(\varepsilon, \varepsilon_{2n}^*)}{D t} = 0.$$

Ferner ist

$$\frac{d \varepsilon}{d t} = 0,$$

$$\frac{d \varepsilon_{2n}^*}{d t} = 1.$$

Die Periode ist

$$T = T(\varepsilon, \varepsilon_2^0, \dots, \varepsilon_{2n-1}^0) = T^*(\varepsilon).$$

Man sieht hieraus, daß  $f$  als Dichte einer zweidimensionalen Gesamtheit gedeutet werden darf und daß sich die Überlegungen von § 3–4 auf diese Gesamtheit anwenden lassen. Setzen wir

$$4 \pi^2 \left[ \frac{D(\varepsilon, \dots, \varepsilon_{2n-1})}{\left( \frac{\partial T(\varepsilon, \dots, \varepsilon_{2n-1})}{\partial \varepsilon} \right)^2} \left( \frac{\partial \varrho(\varepsilon, \dots, \varepsilon_{2n}^*, 0)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \varrho}{\partial \varepsilon_{2n}^*} \cdot \varepsilon_{2n}^* \cdot \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) \right. \\ \left. + \varrho \cdot \frac{\frac{\partial D}{\partial \varepsilon}}{\left( \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right)^2} - \varrho \cdot D \frac{\frac{\partial^2 T}{\partial \varepsilon^2}}{\left( \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right)^3} \right] = \Phi(\varepsilon, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n}^*), \\ \frac{2 \pi}{\partial T} \varrho \cdot D = \varphi(\varepsilon, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n}^*),$$

wobei  $\varrho$  die zur Zeit  $t=0$  herrschende Phasendichte bedeutet, und sei in der Phasenausdehnung  $g$ , unter  $T_0, \mu, \nu$  drei Konstanten verstanden,

$$\frac{T}{2 \pi} < T_0,$$

$$|\Phi| < \mu,$$

$$|\varphi| < \nu.$$

Als dann ist, wenn  $k_1$  und  $k_2$  zwei Zahlenfaktoren bedeuten, nach (49):

$$\left| \int_{\gamma} f(\varepsilon, \varepsilon_{2n}^*) d\sigma - \int_{\gamma} f_s(\varepsilon) d\sigma \right| \leq \frac{k_1 T_0^4 \mu + k_2 T_0^3 \nu}{t} = \frac{N}{t}$$

und demnach besteht für alle  $\varepsilon^0, \varepsilon_1^0, \dots, \varepsilon_{2n-2}^0$  in  $g$ :

$$\left| \int_{(\gamma)} F(\varepsilon, \varepsilon_2^0, \varepsilon_3^0, \dots, \varepsilon_{2n-1}^0, \varepsilon_{2n}^*) d\varepsilon d\varepsilon_{2n}^* - \int_{(\gamma)} F_s d\varepsilon d\varepsilon_{2n}^* \right| \leq \frac{N}{t}.$$

Wir haben also:

$$\left| \int_{(g^0)} \dots \int F d\varepsilon \dots d\varepsilon_{2n}^* - \int_{(g^0)} \dots \int F_s d\varepsilon \dots d\varepsilon_{2n}^* \right| \leq \frac{C}{t} \cdot N$$

(wenn  $C$  eine Konstante ist, welche von der geometrischen Beschaffenheit der Phasenausdehnung  $g$  abhängt), woraus (62) folgt.

Stillschweigend mußten wir voraussetzen, analog wie in § 3, daß die Funktionen

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = \psi(q_1 \dots p_n),$$

$$\frac{\partial (\varepsilon \dots \varepsilon_{2n})}{\partial (q \dots p)} = \Delta(q_1 \dots p_n)$$

im Gebiete  $g$  nirgends verschwinden. Kommen Nullstellen vor, so werden wir ähnlich wie in § 3 vorgehen und Konvergenz feststellen. Es könnte aber auch vorkommen, daß  $\partial T / \partial \varepsilon$  identisch verschwindet. In diesem Falle ist  $\varepsilon$  unbrauchbar und muß durch ein anderes  $\varepsilon_i$  ersetzt werden. Verschwinden dagegen alle ersten partiellen Ableitungen der Funktion  $T$  identisch, so sieht man sofort, daß der ursprüngliche Charakter der Verteilung periodisch mit der Periode  $T$  wiederkehrt.

Die  $G$ -Funktion wird ganz ähnlich wie in § 4 behandelt. Bis nun haben wir stets an die kanonische Form der Differentialgleichungen angeknüpft. Alle bisher entwickelten Sätze





ander, so sind die Phasenkurven *nicht geschlossen* und die bis nun entwickelten Sätze dürfen nicht unmittelbar angewendet werden.

## 2. Der Eulersche Fall des starren Körpers.

Die Differentialgleichungen lauten

$$\frac{dp}{dt} = \frac{B-C}{A} q r, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{C-A}{B} r p, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{A-B}{C} p q.$$

$A, B, C$  bedeuten die drei Hauptträgheitsmomente,  $p, q, r$  sind die drei Winkelgeschwindigkeiten um die Hauptachsen.<sup>1)</sup>

Man rechnet leicht nach, daß

$$\iiint dp dq dr$$

eine Integralinvariante für das Differentialgleichungssystem ist. Ferner ist leicht festzustellen, daß die beiden Annahmen von § 1, für ein gewisses invariantes  $p, q, r$ -Gebiet  $G$  erfüllt sind. Da überdies die Periode keine Konstante ist, wie aus der Mechanik bekannt, so *konvergiert eine statistische Phasengesamtheit* der betrachteten Systeme, welche das Gebiet  $G$  erfüllt, *gegen statistisches Gleichgewicht*.

Göttingen, Januar 1911.

1) Vgl. P. Appell, *Traité de Mécanique* Paris 1904. p. 155.

(Eingegangen 10. Februar 1911.)

**5. Bemerkung**  
**zu den Versuchen des Hrn. Marx**  
**über die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen;**  
**von J. Franck und R. Pohl.**

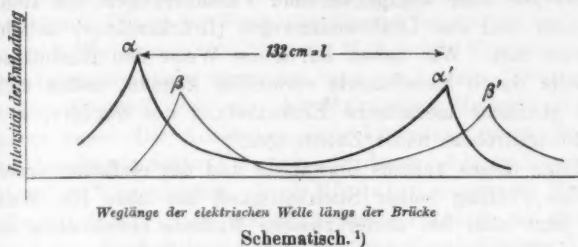
§ 1. Hr. Marx hat jüngst in einer sehr umfangreichen Arbeit<sup>1)</sup> abermals versucht, die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen mit der elektrischer Drahtwellen zu vergleichen.

Er erregt ein Röntgenrohr mit schnellen Hertzschen Schwingungen ( $\lambda/2 = 66$  cm) und läßt die Röntgenstrahlen nach Durchlaufen eines bestimmten Weges auf eine Elektrode *P* fallen. Diese Elektrode schwingt mit dem Röntgenrohr durch induktive Koppelung synchron, aber mit einer Phasendifferenz, die durch variable Drahtlängen (Brücke) beliebig reguliert werden kann. Erreichen die Röntgenstrahlen die Elektrode, die sich im Vakuum befindet, im Moment, wo ihr Potential negativ ist, so soll eine *selbständige Entladung* einsetzen, die unabhängig von der Fortdauer der Röntgenstrahlen weiterbesteht. Das Ausbleiben einer Entladung soll hingegen das Antreffen einer positiven Spannung an der Elektrode *P* anzeigen.

§ 2. Von dieser Vorstellung ausgehend, hat Hr. Marx die negative Aufladung eines Faradaykäfigs gegenüber der Elektrode *P* in je 15 Sekunden währender Beobachtungsdauer graphisch aufgenommen als Funktion des zwischen *P* und dem Röntgenrohr eingeschalteten Drahtweges. Den experimentellen Befund zeigt die Kurve  $\alpha\alpha'$  der Figur. Das gleiche ist dann für einen größeren Rohrabstand wiederholt, Kurve  $\beta\beta'$ , und die Verschiebung der Maxima  $\alpha\beta$  und  $\alpha'\beta'$  ergibt sich gleich der Änderung des Röntgenrohrabstandes. Daraus folgert

1) E. Marx, Ann. d. Phys. 33. p. 1305—1391. 1910.

Hr. Marx die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen gleich der elektrischer Drahtwellen, d. h. die Lichtgeschwindigkeit.



§ 3. Dabei läßt aber Hr. Marx, gerade wie bei der ersten Methode<sup>2)</sup> gänzlich die elektrische *Luftwelle* außer acht, die vom Röntgenrohr nebst Zuleitungen ausgeht und trotz alles statischen Schutzes mit der Drahtwelle längs der Brücke *interferiert*. Wir<sup>3)</sup> haben seinerzeit mittels eines Spannungsindikators (He-Rohr<sup>4)</sup>) parallel zur Elektrode *P* und dem Faradaykäfig *F*)

1) *Anm. bei der Korr.* In dieser Skizze liegen die Minima relativ zu hoch. Doch zeigen die Zahlen der Tab. VI und VII, daß die wirklichen Kurven mit Ausnahme von einer die Abszisse nicht berühren, was aus der Kurventafel V kaum ersichtlich ist, da in ihr die Abszissenlinien fehlen.

2) E. Marx, Ann. d. Phys. 20. p. 677—722. 1906; 28. p. 37—56 u. p. 153—174. 1909. — J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang in Gasen, Deutsch von E. Marx, p. 542.

3) J. Franck u. R. Pohl, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Ges. 10. p. 489—494. 1908.

4) Nach der Erwiderung in den Verhandl. d. Deutsch. Phys. Ges. 10. p. 598—599. 1908 zu urteilen, hat Hr. Marx die von uns vielleicht etwas kurz beschriebene Verwendung des He-Rohres mißverstanden. Hr. Marx bekämpft dort einen natürlich verfehlten Versuch, den wir weder gemacht noch beschrieben haben. Darum sei die Verwendung des He-Rohres hier etwas ausführlicher an zwei Beispielen erläutert: Wir blendeten die Röntgenstrahlen von der Elektrode *P* gänzlich ab und stellten die Außenelektroden am He-Rohr so, daß die Entladung an *P* gerade nicht mehr einsetzte. Dann ließ sich die Entladung im He-Rohr durch eine Abstandsänderung des Röntgenrohres hervorrufen und durch eine Variation des Drahtwellenweges wieder auslöschen. Oder wir ließen die Röntgenstrahlen *dauernd* auf die Elektrode *P* auffallen und beobachteten beim Verschieben des Rohres und der Brücke dann die *parallelen* Intensitätsänderungen beider Entladungen, sowohl an der Elektrode *P* wie im Heliumrohr.

nachgewiesen, daß diese Welle stets an der Elektrode *P* ein Interferenzpotential erzeugt, dessen Höhe sich durch einander verstärkende oder kompensierende Veränderungen des Rohrabstandes und des Drahtwellenweges (Brückenlänge) beliebig variieren läßt. Wir haben auf keine Weise den Einfluß der Luftwelle durch Metallschutz vermeiden können, selbst nicht durch gänzliche metallische Einkapselung des Senders, d. h. des Röntgenrohres nebst Zuleitungen.<sup>1)</sup>

Trotz dieses unseres Einwandes und der einfachen *experimentellen* Prüfung seiner Stichhaltigkeit hat aber Hr. Marx auch jetzt *nicht* bei seiner zweiten Methode ebensowenig wie bei der Wiederholung der ersten in dieser Richtung auch nur einen einzigen Versuch publiziert, um die Spannung an der Elektrode *P* zu prüfen, d. h. um den Nachweis zu bringen, daß es ihm gelungen ist, die Interferenz der Luft- und der Drahtwelle zu vermeiden.

§ 4. Diese Interferenz der Luft- und Drahtwelle gibt eine äußerst einfache Erklärung der Kurvenform bei der zweiten Methode, die mit dem Marxschen Grundprinzip der Methode, nämlich Auslösung in negativer Phase, keine Auslösung in positiver, *ohne Hilfsannahmen nicht* verständlich ist. Unsere Auffassung ist die folgende: Hr. Marx zeigt, daß die von den Strahlen ausgelöste und vom Fortbestand der Strahlen unabhängige selbständige Gasentladung rapide mit der Spannung ansteigt. Sind also bei  $\alpha$ , vgl. Figur, Rohrabstand und Brückenlänge so gewählt, daß Luft- und Drahtwelle das maximale

1) Wir haben diese Metallkapsel auf die verschiedenste Weise mit der Erde und mit anderen Metallteilen verbunden. Doch stets ergab der empfindliche He-Spannungsindikator den Einfluß der Luftwelle, ebenso wie bei Einschaltung einer großen Blechplatte zwischen Röntgenrohr und Brücke, durch die wir in unserer ersten Mitteilung fälschlich eine vollkommene Schirmwirkung zu erreichen glaubten. (Verhandl. d. Deutsch. Phys. Ges. 10. p. 117. 1908.)

Übrigens beweist Hr. Marx selbst (Methode I, Phys. Zeitschr. 6. p. 772, § 9. 1905), daß die von dem Röntgenrohr durch die Luft ausgehende Welle auch bei „völliger metallischer Einkapselung“ des ganzen Auffangesystems das Potential an der Elektrode *P* beeinflusst, nur deutet er die auftretenden Potentialschwankungen als Folge einer *periodischen Elektronenemission* von *P* unter dem Einfluß der Röntgenstrahlen (vgl. dazu E. Marx, Phys. Zeitschr. 6. p. 834–835. 1905).

Interferenzpotential geben, so haben wir maximale Entladung. Eine kleine Änderung des Drahtwellenweges ändert dann das Interferenzpotential nur wenig, die Entladung fällt hingegen erheblich. Die *spitze* Form der Kurven ist selbstverständlich.

§ 5. Bei unserer Deutung der Marxschen Messungen durch Interferenzpotentiale vermeidet man auch ohne weiteres den *zweiten Einwand*, den man der Marxschen Methode nicht ersparen kann: Die Auslösung einer Entladung durch Röntgenstrahlen ist ein *träger* Vorgang, und daran ist ja auch seinerzeit Blondlot<sup>1)</sup> gescheitert. Auch Blondlot erregte ein Röntgenrohr mit Hertzschen Wellen, koppelte induktiv mit dem Erreger eine Funkenstrecke, um an dieser durch Röntgenstrahlen eine Entladung auszulösen und die Zeit der Ankunft der Röntgenstrahlen durch Drahtwellenwege verschiedener Länge zu variieren. — Mögen auch die Verhältnisse im Vakuum günstiger liegen, auf jeden Fall muß Hr. Marx erst *experimentell* beweisen, daß eine selbständige Entladung an einer Elektrode im Vakuum *nicht* mehr einsetzt, wenn zwischen dem Aufhören der Bestrahlung und dem Auftreten einer negativen Spannung weniger als  $10^{-9}$  Sek. verstreichen. Dieser experimentelle Nachweis fehlt und dürfte wohl schwer zu erbringen sein.

Bei unserer Deutung der Kurven durch Interferenzpotentiale hingegen ist man von diesem Nachweis gänzlich unabhängig, die Abhängigkeit der Entladungsintensität von der Weglänge der Drahtwelle erklärt sich, gleichgültig, wie lang der die Entladung erleichternde Zustand die Röntgenstrahlungsemission überdauert.

§ 6. *Zusammenfassung.* 1. Hr. Marx macht auch in der zweiten Methode keinen einzigen Versuch, um durch *direkte Spannungsmessung* zu zeigen, daß an der Empfangselektrode kein Interferenzpotential einer elektrischen Luft- und Drahtwelle auftritt. Wir haben seinerzeit bei der Wiederholung der ersten Methode die Spannung *gemessen*, das Interferenzpotential aber *nicht* vermeiden können.

2. Hr. Marx gibt keinen *experimentellen* Beweis dafür, daß die Auslösung einer Entladung durch Röntgenstrahlen, die bei

1) R. Blondlot, Compt. rend. 136. p. 666. 1902.

hohen Drucken träge ist (Blondlots mißglückte Methode), bei tiefen Drucken ihre Trägheit verliert. D. h. Hr. Marx zeigt nicht, daß die Entladung ausbleibt, wenn zwischen dem Ende der Bestrahlung und dem Auftreten einer Spannung an der Elektrode Zeiten von weniger als  $10^{-9}$  Sek. verstreichen.

3. Solange diese beiden experimentellen Beweise fehlen, sehen wir keinen Grund, die Marxschen Versuche anders als durch Interferenz elektrischer Luft- und Drahtwellen zu erklären, zumal man dann die Messungskurven deuten kann, ohne, im Gegensatz zu Hrn. Marx, über die Wirkung der Röntgenstrahlen mehr voraussetzen zu müssen, als die bekannte Tatsache, daß sie überhaupt fähig sind, eine selbständige Gasentladung auszulösen.

Berlin, Physik. Inst. d. Univ., Januar 1911.

(Eingegangen 20. Januar 1911.)

**6. Über den Einfluß  
des frühzeitigen Auslösens des Funkens auf  
Dämpfungsmessungen<sup>1)</sup>;  
von B. Macků.**

Als ich die Änderung der Dämpfung eines Oszillationskreises, welche durch die Schaltung eines anderen Kreises an die Funkenstrecke des ersteren hervorgerufen wird, gemessen habe, bin ich zu folgendem auffallenden Resultate gekommen: Diejenigen Dämpfungsmessungen, welche auf der Messung einer Resonanzkurve basierten, ergaben eine erhebliche *Erniedrigung* der Dämpfung durch Zuschaltung des zweiten Oszillationskreises, und zwar nahm diese Erniedrigung mit der Abnahme der Schwingungszahl des zugeschalteten Kreises zu. Die Messung des Maximaleffektes bei Resonanz (des Meßkreises) und die Messung des Stromeffektes im Primärkreise (durch einen lose gekoppelten Thermoelementkreis ohne Kondensator) zeigt dagegen eine *Erhöhung* der Dämpfung, durch die Zuschaltung eines zweiten Kreises; diese Erhöhung ist prozentual kleiner als die früher erwähnte Erniedrigung, ihre Abhängigkeit von der Schwingungszahl des zugeschalteten Kreises ist komplizierter. Die Ursache der Unübereinstimmung dieser beiden Methoden ist natürlich darin zu suchen, daß die Theorie der Resonanzmethode nicht vollkommen der Wirklichkeit entspricht. Der Unterschied zwischen der Theorie und der Wirklichkeit besteht darin, daß die Funkendämpfung nicht konstant (d. h. von der Stromintensität nicht unabhängig) ist, und daß die Entladung nicht bis zu unendlich kleinen Amplituden fortgesetzt wird (wie es die Theorie voraussetzt), sondern daß die Entladung bei einer endlichen Amplitude aufhört, d. h. daß der Funken gegenüber den theoretischen Voraussetzungen frühzeitig erlischt.

1) Aus den Sitzungsberichten der Königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag 1910.

Eine Theorie, welche die Abhängigkeit des Funkenwiderstandes von der Stromintensität berücksichtigen sollte, würde zu sehr komplizierten Rechnungen führen, und solange es sich nur um Oszillationen eines einzigen Kreises handelt, wäre sie auch überflüssig, denn es ist nach den Roschanskyschen Beobachtungen die Funkendämpfung bei den gebräuchlichsten Schwingungszahlen genügend konstant.<sup>1)</sup>

Demgegenüber kann der Einfluß eines frühzeitigen Auslöschens des Funkens verhältnismäßig einfach in Rechnung gezogen werden, und er kann auch bei einem späten Auslöschen des Funkens sehr beträchtliche Änderung der Resonanzkurve zur Folge haben. Die Ursache dieser Tatsache ist in folgendem zu suchen. Denken wir uns, daß beide Oszillationskreise vollkommen isochron sind. Dann wirkt der Primärkreis auf den Meßkreis in dem Sinne, daß er beständig seine eigenen Oszillationen unterstützt und vergrößert. Ein frühzeitiges Auslöschen des Funkens verursacht in diesem Falle eine Verminderung des Stromeffektes im Meßkreise. Sind dagegen die Kreise ein wenig verstimmt, dann werden die Oszillationen im Meßkreise, welche durch die ersten Schwingungen des Primärkreises hervorgerufen wurden, durch die weiteren Schwingungen anfangs noch unterstützt. Diese Unterstützung wird aber geschwächt, wenn die Phasenverschiebung zwischen beiden Oszillationen sich vergrößert, und die Wirkung des Primärkreises hört ganz auf, wenn die Phasenverschiebung um  $\pi/2$  anwächst; von dieser Zeit an wirken die Oszillationen des Primärkreises gegen die eigenen Oszillationen des Meßkreises, und diese Gegenwirkung wächst wieder so lange, bis die Phasenverschiebung um  $\pi$  gewachsen ist, usw. Löscht also zum Beispiel der Funke in demjenigen Augenblicke aus, wenn die Phasenverschiebung um  $\pi/2$  gewachsen ist, dann ist die Wirkung im Meßkreise größer, als wenn der Funke überhaupt nicht auslischt. Es ist also klar, daß durch ein frühzeitiges Auslöschen das Maximum der Resonanzkurve zwar immer erniedrigt wird, bei der Verstimmung kann aber der Effekt im Meßkreise sowohl größer als auch kleiner sein als ohne Auslöschen. Es kann somit keine normale Resonanzkurve resultieren (d. h. die

1) D. Roschansky, Jahrb. d. drahtl. Tel. 3. p. 21. 1909.



aus verschiedenen Höhen berechneten Dämpfungsdekrementen können nicht untereinander übereinstimmen). Infolge der Erniedrigung des Maximums und eventueller Erhöhung anderer Ordinaten kann man erwarten, daß aus der Resonanzkurve zu große Werte der Dämpfung resultieren werden.

Aus den hier angeführten Gründen habe ich mir die Aufgabe gestellt, den Einfluß eines frühzeitigen Auslöschens sowohl rechnerisch als auch durch Experiment zu verfolgen.

### I. Theorie.

Setzt man voraus, daß es sich um zwei Oszillationskreise handelt, welche so lose miteinander induktiv gekoppelt sind, daß man die Rückwirkung des Sekundärkreises (des Meßkreises) vernachlässigen kann. Dann ist das Potential in beiden Kreisen gegeben durch die Differentialgleichungen:

$$(1) \quad V_1'' + 2\delta_1 V_1' + b_1 V_1 = 0,$$

$$(2) \quad V_2'' + 2\delta_2 V_2' + b_2 V_2 = k_{21} V_1'',$$

wo bedeutet:

$$2\delta_1 = \frac{R_1}{L_{11}}, \quad 2\delta_2 = \frac{R_2}{L_{22}},$$

$$b_1 = \frac{1}{L_{11} C_1}, \quad b_2 = \frac{1}{L_{22} C_2},$$

$$k_{21} = \frac{L_{21} C_1}{L_{22} C_2}.$$

$R_1$  und  $R_2$  sind Widerstand im Primär- und Sekundärkreise

$C_1$  „  $C_2$  „ Kapazität „ „ „ „

$L_{11}$  „  $L_{22}$  „ Selbstinduktion „ „ „ „

$L_{21}$  ist gegenseitige Induktion.

Lischt der Funken nach der Zeit  $T$  aus, dann gilt die Gleichung (2) für den Sekundärkreis nur für die Zeit 0 bis  $T$ , für weitere Zeit gilt aber

$$(3) \quad V_2'' + 2\delta_2 V_2' + b_2 V_2 = 0.$$

Mit einem Thermoelement, welches sich im Sekundärkreise befindet (oder in einem mit diesem induktiv gekoppelten Kreise mit großer Selbstinduktion), wird der Stromeffect im Sekundärkreise gemessen, oder die Größe:

$$(4) \quad \psi_{(2,2)} = C_2^2 \int_0^\infty V_2'^2 dt.$$

Dieses Integral teilen wir in den Stromeffect vom Anfang der Entladung bis zum Auslöschten des Funkens (d. h. von 0 bis  $T$ ) und in den Stromeffect bis zum Verschwinden der Oszillationen im Sekundärkreise (d. h. von  $T$  bis  $\infty$ ), also:

$$C_2^2 \int_0^{\infty} V_2'^2 dt = C_2^2 \int_0^T V_2'^2 dt + C_2^2 \int_T^{\infty} V_2'^2 dt.$$

Für die Zeit von 0 bis  $T$  gilt die Differentialgleichung (2); multipliziert man dieselbe mit  $V_2'$  und integriert in den Grenzen 0 bis  $T$ , dann bekommt man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} V_2'^2(T) - \frac{1}{2} V_2'^2(0) + 2 \delta_2 \int_0^T V_2'^2 dt + \frac{1}{2} C_2 V_2^2(T) - \frac{1}{2} C_2 V_2^2(0) \\ = k_{21} \int_0^T V_1'' V_2' dt. \end{aligned}$$

Es ist aber:

$$V_2(0) = 0, \quad V_2'(0) = 0$$

und außerdem:

$$\frac{1}{2} V_2'(T) + \frac{1}{2} C_2 V_2^2(T) = \frac{1}{L_2 C_2^2} \left[ \frac{1}{2} L_2 C_2^2 V_2'^2(T) + \frac{1}{2} C_2 V_2^2(T) \right].$$

Der Klammerausdruck drückt aber diejenige Energie aus, welche der Sekundärkreis in der Zeit  $T$  besitzt. (Das erste Glied bedeutet die magnetische, das zweite die elektrostatische Energie.) Da aber alle diese Energie im Sekundärkreise durch weitere Oszillationen in Wärme verwandelt wird (und nur aus dieser Energie im Sekundärkreise nach der Zeit  $T$  die Wärme entsteht), kann man schreiben:

$$\frac{1}{2} L_2 C_2^2 V_2'^2(T) + \frac{1}{2} C_2 V_2^2(T) = R_2 C_2^2 \int_T^{\infty} V_2'^2 dt = 2 \delta_2 L_2 C_2^2 \int_T^{\infty} V_2'^2 dt.$$

Mit Hilfe dieser Relation bekommt man aber:

$$2 \delta_2 \int_0^T V_2'^2 dt + 2 \delta_2 \int_T^{\infty} V_2'^2 dt = k_{21} \int_0^T V_1'' V_2' dt$$

oder

$$(5) \quad \psi_{(2,2)} = C_2^2 \int_0^{\infty} V_2'^2 dt = \frac{C_2^2 k_{21}}{2 \delta_2} \int_0^T V_1'' V_2' dt.$$

Auf diese Weise ist die Berechnung des Ausdruckes  $\int_0^\infty V_1'' V_2' dt$  übergeführt auf eine einfachere Berechnung des Ausdruckes  $\int_0^T V_1'' V_2' dt$ .

Diese Rechnung wird ganz einfach durchgeführt, indem man für die Integrale der Gleichungen (1) und (2) die Form benützt:

$$V_1 = A_1 e^{x_1 t} + A_2 e^{x_2 t},$$

$$V_2 = B_1 e^{x_1 t} + B_2 e^{x_2 t} + B_3 e^{x_3 t} + B_4 e^{x_4 t}.$$

Berechnet man die Konstanten  $A$  und  $B$  aus den Anfangsbedingungen (für  $t=0$ ,  $V_1 = V_{10}$ ,  $V_1' = V_2 = V_2' = 0$ ) und aus der Notwendigkeit, daß  $V_1$  und  $V_2$  die Gleichung (1) und (2) befriedigen müssen, und bezeichnet man noch:

$$\omega_1 = \sqrt{b_1 - \delta_1^2}, \quad \omega_2 = \sqrt{b_2 - \delta_2^2},$$

$$N = i b \omega_1^2 \omega_2 [(b_1 - b_2)^2 + 4(\delta_1 + \delta_2)(\delta_1 b_2 + \delta_2 b_1)] [(b_1 - b_2)^2 + 4(\delta_1 - \delta_2)(\delta_1 b_2 - \delta_2 b_1)],$$

dann bekommt man für das gesuchte Integral:

$$(6) \left\{ N \int_0^T V_1'' V_2' dt = 8 i \omega_2^2 \omega_2 k_{21} V_{10}^2 b_1^2 [(b_1 - b_2)^2 + 4(\delta_1 - \delta_2)(\delta_1 b_2 - \delta_2 b_1)] (\delta_1 b_2 + \delta_2 b_1) + 4 i \omega_2 k_{21} V_{10}^2 b_1^2 [(b_1 - b_2)^2 + 4(\delta_1 + \delta_2)(\delta_1 b_2 + \delta_2 b_1)] e^{-2\delta_1 T} \cdot \{ b_1 [(\delta_1 - \delta_2) b_1 + (\delta_1 b_2 - \delta_2 b_1)] - \delta_1 [b_1 (b_1 - b_2) + 2 \delta_1 (\delta_1 b_2 - \delta_2 b_1)] \cos 2\omega_1 T - 2 \delta_1 \omega_1 [\delta_1 b_2 + \delta_2 b_1] \sin 2\omega_1 T \} + 8 i \delta_1 \omega_1 k_{21} V_{10}^2 b_1^2 e^{-(\delta_1 + \delta_2) T} \cdot \{ [b_1 + b_2 + 2(\delta_1 \delta_2 - \omega_1 \omega_2)] [2(\delta_1 b_2 - \delta_2 b_1)(\delta_1 b_2 + \delta_2 b_1) + b_2 (b_1 - b_2)(b_1 + \delta_1 \delta_2 + \omega_1 \omega_2)] \cos (\omega_1 + \omega_2) T + \{ 2(\delta_1 \omega_1 b_2^2 - \delta_2 \omega_2 b_1^2) + b_2 (b_1 + b_2)(\delta_1 \omega_2 - \delta_2 \omega_1) \} \sin (\omega_1 + \omega_2) T - [b_1 + b_2 + 2(\delta_1 \delta_2 + \omega_1 \omega_2)] [2(\delta_1 b_2 - \delta_2 b_1)(\delta_1 b_2 + \delta_2 b_1) + b_2 (b_1 - b_2)(b_1 + \delta_1 \delta_2 - \omega_1 \omega_2)] \cos (\omega_1 - \omega_2) T + \{ 2(\delta_1 \omega_1 b_2^2 + \delta_2 \omega_2 b_1^2) - b_2 (b_1 + b_2)(\delta_1 \omega_2 + \delta_2 \omega_1) \} \sin (\omega_1 - \omega_2) T \} \right\}.$$

Der Funken löscht am wahrscheinlichsten aus, wenn die Stromintensität im Primärkreise durch Null geht<sup>1)</sup>, d. h. nachdem die Oszillationen im Primärkreise eine ganze Anzahl von Halbschwingungen durchliefen. Es ist dann also

$$\omega_1 T = n\pi,$$

wo  $n$  eine ganze Zahl bedeutet.

Infolge der angeführten Voraussetzung erhält man:

$$(7) \quad \psi_{(2,2)} = \frac{L_{21}^2 C_1^2 V_{10}^2}{L_{22}^2} \cdot \frac{b_1^2 (\delta_1 b_2 + \delta_2 b_1)}{4 \delta_1 \delta_2 [(b_1 - b_2)^2 + 4(\delta_1 + \delta_2)(\delta_1 b_2 + \delta_2 b_1)]} \cdot \left\{ 1 + \frac{[\delta_1 b_2 - \delta_2 b_1][(b_1 - b_2)^2 + 4(\delta_1 + \delta_2)(\delta_1 b_2 + \delta_2 b_1)]}{[\delta_1 b_2 + \delta_2 b_1][(b_1 - b_2)^2 + 4(\delta_1 - \delta_2)(\delta_1 b_2 - \delta_2 b_1)]} e^{-2\delta_1 T} \right. \\ \left. - 2\delta_1 e^{-(\delta_1 + \delta_2)T} \left[ \frac{b_2(b_1 - b_2)^2 + 4(\delta_1 b_2 - \delta_2 b_1)(\delta_1 b_2 + \delta_2 b_1)}{[\delta_1 b_2 + \delta_2 b_1][(b_1 - b_2)^2 + 4(\delta_1 - \delta_2)(\delta_1 b_2 - \delta_2 b_1)]} \cos(\omega_1 - \omega_2)T \right] \right. \\ \left. + \frac{\delta_2}{\omega_2} \cdot \frac{b_2(2b_1 + b_2)(b_1 - b_2) + 4(\delta_1 b_2 - \delta_2 b_1)(\delta_1 b_2 + \delta_2 b_1)}{[\delta_1 b_2 + \delta_2 b_1][(b_1 - b_2)^2 + 4(\delta_1 - \delta_2)(\delta_1 b_2 - \delta_2 b_1)]} \sin(\omega_1 - \omega_2)T \right\}.$$

Setzt man in diesen Ausdruck:

$$\frac{b_2}{b_1} = 1 - \xi,$$

$$\frac{\delta_1}{\sqrt{b_2}} = \vartheta_1, \quad \frac{\delta_2}{\sqrt{b_1}} = \vartheta_2$$

( $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  wollen wir *reduzierte Dämpfungen* nennen).

In den Korrektionsgliedern können wir mit genügender Genauigkeit schreiben

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1} = \frac{\sqrt{b_1} - \sqrt{b_2}}{\sqrt{b_1}} = \frac{\xi}{2},$$

$$\frac{\delta_1}{\omega_1} = \frac{\delta_1}{\sqrt{b_1}} = \vartheta_1.$$

Vernachlässigt man außerdem  $\xi$  gegen 1 (denn die Glieder mit  $\xi$  üben keinen großen Einfluß auf das Endresultat aus

1) Findet das Auslöschen des Funkens nicht gerade in demjenigen Augenblicke statt, wenn die Stromintensität Null wird, dann ändern sich die weiteren Ausdrücke nur unwesentlich, denn es wird die Wirkung des Primärkreises nur um diejenige (kurze) Zeit vergrößert, welche von dem Augenblicke des letzten Nullwerdens der Intensität bis zum Auslöschen des Funkens abfließt. Es kann aber diese Wirkung sicher vernachlässigt werden, falls bis zum Auslöschen des Funkens mindestens einige Schwingungen durchlaufen sind, denn es erscheint dann die genannte Wirkung in weiteren Ausdrücken nur in Korrektionsgliedern.

und außerdem werden sie bei Bestimmung der Dämpfung aus der Breite der Resonanzkurve fast vollkommen eliminiert) dann resultiert für den Stromeffekt:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_{(2,2)} &= \frac{L_{21}^2 C_1^2 V_{10}^2 \sqrt{b_1}}{4 \vartheta_1 \vartheta_2 L_{22}^2} \cdot \frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2}{\xi^2 + 4(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2} \\ &\cdot \left\{ 1 + \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \cdot \frac{\xi^2 + 4(\vartheta_1 - \vartheta_2)(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\xi^2 + 4(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2} e^{-2\delta_1 T} \right. \\ &- \frac{2\vartheta}{\vartheta_1 + \vartheta_2} e^{-(\delta_1 + \delta_2)T} \left[ \frac{\xi^2 + 4(\vartheta_1 - \vartheta_2)(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\xi^2 + 4(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2} \cos \frac{\xi}{2\vartheta_1} \delta_1 T \right. \\ &\left. \left. + \vartheta_2 \frac{3\xi + 4(\vartheta_1 - \vartheta_2)(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\xi^2 + 4(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2} \sin \frac{\xi}{2\vartheta_1} \delta_1 T \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Für die Dämpfungsmessungen wird am meisten ein *Meßkreis mit möglichst kleiner Dämpfung* verwendet. Wenn aber  $\vartheta_2$  einigemal kleiner als  $\vartheta_1$  ist, dann kann man in Korrekturen  $\vartheta_2$  vernachlässigen, wodurch man erhält:

$$\psi_{(2,2)} = \frac{L_{21}^2 C_1^2 V_{10}^2 \sqrt{b_1}}{4 \vartheta_1 \vartheta_2 L_{22}^2} \cdot \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\xi^2 + 4(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2} \left\{ 1 + e^{-2\delta_1 T} - 2 e^{-\delta_1 T} \cos \frac{\xi}{2\vartheta_1} \delta_1 T \right\}.$$

Das Maximum des Effektes entsteht für  $\xi = 0$  und hat den Wert:

$$(9) \quad \psi_{(2,2)\max.} = \frac{L_{21}^2 C_1^2 V_{10}^2 \sqrt{b_1}}{4 \vartheta_1 \vartheta_2 L_{22}^2} \cdot \frac{1}{4(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left\{ 1 - e^{-\delta_1 T} \right\}^2.$$

Für die reduzierte Resonanzkurve resultiert jetzt:

$$(10) \quad \eta = \frac{4(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2}{\xi^2 + 4(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2} \left[ 1 + \frac{4 e^{-\delta_1 T}}{(1 - e^{-\delta_1 T})^2} \sin^2 \frac{\xi}{2\vartheta_1} \frac{\delta_1 T}{2} \right].$$

Da aber  $\vartheta_2$  für Korrekturen genügend klein gegen  $\vartheta_1$  vorausgesetzt ist, kann man der letzten Gleichung auch die Form geben:

$$(11) \quad \eta = \frac{1}{1 + \left[ \frac{\xi}{2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \right]^2} \left[ 1 + \frac{4 e^{-\delta_1 T}}{(1 - e^{-\delta_1 T})^2} \sin^2 \frac{\xi}{2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \frac{\delta_1 T}{2} \right].$$

Dieser Ausdruck sagt: Alle Resonanzkurven, welche mit einem Kreise aufgenommen wurden, dessen Dämpfung genügend klein ist gegenüber der Dämpfung des Primärkreises, sind einander *ähnlich*, wenn bei allen das Auslöschen des Funkens

bei derselben prozentualen Potentialamplitude zustande kommt; oder anders gesagt: der prozentuale Unterschied des wahren Wertes der reduzierten Dämpfung und desjenigen Wertes, welcher aus der Breite der Resonanzkurve in bestimmter Höhe ( $\eta$ ) gefunden wird, ist für diese Höhe konstant für beliebige Werte der reduzierten Dämpfung.

Bezeichnet man mit  $\eta_n$  den normalen Wert der Ordinate, dann ist nach Gleichung (11)

$$\eta = \eta_n(1 + \Delta),$$

wo  $\Delta \geq 0$ , wobei das Gleichheitszeichen nur für einzelne Punkte der Kurve gilt.

Der wahre Wert der reduzierten Dämpfung ist:

$$\vartheta_n = \frac{\sigma}{4} \sqrt{\frac{\eta_n}{1 - \eta_n}},$$

wo  $\sigma$  die Breite der Resonanzkurve bedeutet; der, aus der Resonanzkurve gefundene Wert ist aber

$$\vartheta = \frac{\sigma}{4} \sqrt{\frac{\eta}{1 - \eta}}$$

und somit das Verhältnis beider:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_n} = \sqrt{\frac{\eta(1 - \eta_n)}{\eta_n(1 - \eta)}} = \sqrt{(1 + \Delta) \left(1 + \frac{\Delta}{1 - \eta}\right)},$$

es ist also immer

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_n} \geq 1,$$

d. h. der aus der Resonanzkurve gefundene Wert der reduzierten Dämpfung ist immer größer als der wahre Wert, nur für einzelne Punkte der Resonanzkurve kann er dem wahren gleich sein.

Für eine Orientation über die Größe der durch ein frühzeitiges Auslöschen des Funkens entstandenen Deformation der Resonanzkurve, und über den Einfluß derselben auf die Dämpfungsmessungen sind in der Figur Resonanzkurven gezeichnet, wie sie für verschiedene Werte von  $\delta_1 T$  nach der Formel (11) resultieren, und dazu noch die normale Resonanzkurve (für  $\delta_1 T = 0$ ) zugegeben; in der Tab. 1 sind zusammengestellt die Werte der reduzierten Dämpfungen, wie sie aus

den folgenden Kurven für verschiedene Höhen gefunden wurden, wenn die wahre Dämpfung gleich 1 gesetzt wurde. Außerdem enthält sie die Werte  $p$ , welche die prozentuale Amplitude bedeuten, bei welcher das Auslöschen des Funkens stattfindet.

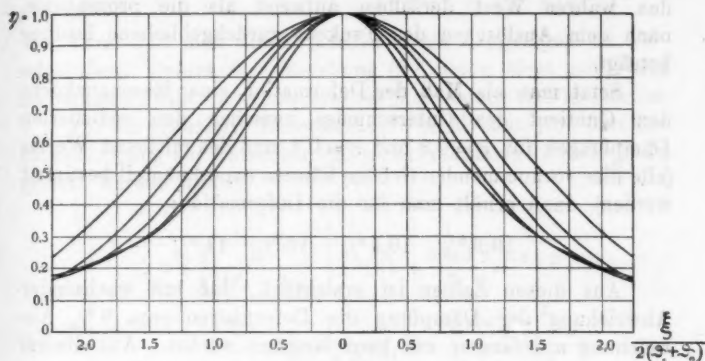


Tabelle I.

$\eta$	$\delta_1 T = 2,0$	2,5	3,0	4,0
	$p = 13,5 \%$	8,2 %	5,0 %	1,8 %
0,9	1,84	1,54	1,36	1,19
0,8	1,78	1,52	1,32	1,15
0,7	1,71	1,45	1,30	1,11
0,6	1,64	1,40	1,25	1,09
0,5	1,56	1,33	1,19	1,07
0,4	1,46	1,25	1,12	1,03
0,3	1,35	1,19	1,06	1,00
0,2		1,05	1,01	1,02

Macht man die Mittelwerte aus den Angaben für  $\eta = 0,8 - 0,4$  (d. h. aus denjenigen, welche am besten aus einer Resonanzkurve bestimmt werden können), dann bekommt man die Zahlen:

1,63 1,39 1,24 1,09.

Durch Division überzeugt man sich, daß die prozentualen Abweichungen der gefundenen mittleren Dämpfungen von den wahren fast vollkommen proportional den Größen  $p$  sind, und

daß man, in Grenzen der Versuchsfehler, für den Proportionalitätsfaktor 4,7 annehmen kann. Dieses bedeutet, daß die aus einer Resonanzkurve gefundene mittlere reduzierte Dämpfung 4,7 mal größere prozentuale Abweichung gegen den wahren Wert derselben aufweist als die prozentuale, nach dem Auslöschen des Funkens zurückgebliebene Ladung beträgt.

Setzt man als Maß der Deformation einer Resonanzkurve den Quotient des Unterschiedes zwischen den reduzierten Dämpfungen für  $\eta = 0,8$  und  $\eta = 0,4$  und des mittleren Wertes (alle hier vorkommenden Größen können experimentell bestimmt werden), dann erhält man für die Deformation:

$$19,6 \% \quad 19,4 \% \quad 16 \% \quad 11 \%$$

Aus diesen Zahlen ist ersichtlich, daß mit wachsender Abweichung der Dämpfung die Deformation (von 9% Abweichung angefangen) nur ganz langsam wächst. Aus diesem Grunde ist die Deformation nicht geeignet zur Bestimmung der Abweichung des gemessenen Wertes der Dämpfung vom wahren Werte.

Kehrt man noch einmal zum Ausdrucke (8) zurück, und behandelt man noch *einen anderen speziellen Fall*, welcher sich auch realisieren kann, nämlich  $\vartheta_2 \doteq \vartheta_1$ .

Mit wachsendem  $\delta_2$  nimmt der Nenner der Korrektionsglieder zwar ab, diese Annahme hat aber einen Einfluß auf das Endresultat nur für sehr kleine Werte von  $\xi$ ; dagegen nimmt das erste Glied infolge des Faktors  $(\vartheta_1 - \vartheta_2)$  und das zweite Glied infolge des negativen Exponenten mit wachsendem  $\vartheta_2$  ab, besonders stark das zweite Glied. Da aber dieses zweite Glied im vorigen Falle das wirksamste war, ist mit dem Wachsen von  $\delta_2$  eine Abnahme der Deformation der Resonanzkurve zu erwarten. Für den von uns gewählten Fall  $\vartheta_2 \doteq \vartheta_1$  gilt aber:

$$\psi_{(3,2)} = \frac{L_{21}^2 C_1^2 V_{10}^2 \sqrt{b_1}}{4 \vartheta_1 \vartheta_2 L_{22}^2} \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\xi^2 + 4(\vartheta_1 + \vartheta_2)^2} \\ \left\{ 1 - e^{-2\delta_1 T} \left( \cos \frac{\xi}{2\vartheta_1} \delta_1 T + \frac{3\vartheta_1}{\xi} \sin \frac{\xi}{2\vartheta_1} \delta_1 T \right) \right\}.$$



Das Maximum entsteht für  $\xi = 0$  und hat den Wert:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_{(2,2)\max.} &= \frac{L_{21}^2 C_1^3 V_{10}^2 \sqrt{b_1}}{4 \vartheta_1 \vartheta_2 L_{22}^2} \frac{1}{4(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \\ &\quad \left\{ 1 - \left( 1 + \frac{3 \delta_1 T}{2} e^{-2 \delta_1 T} \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit demjenigen für verschwindend kleines  $\vartheta_2$  (Gleichung (9)), dann sieht man, daß im jetzigen Falle die Abnahme des Maximums viel kleiner ist.

Für die reduzierte Resonanzkurve erhält man jetzt (mit Berücksichtigung der Tatsache, daß in Korrekturen  $2\vartheta_1 = \vartheta_1 + \vartheta_2$  gesetzt werden kann):

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta &= \frac{1}{1 + \left[ \frac{\xi}{2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \right]^2} \left[ \frac{1}{1 - \left( 1 + \frac{3 \delta_1 T}{2} \right) e^{-2 \delta_1 T}} \right. \\ &\quad \left. \left\{ \sin^2 \frac{\xi}{2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \delta_1 T - \frac{3}{4} \frac{\sin \frac{\xi}{2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \delta_1 T}{\frac{\xi}{2(\vartheta_1 + \vartheta_2)}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cos \frac{\xi}{2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \delta_1 T + \frac{3}{4} \delta_1 T \right\} \right]. \end{aligned} \right.$$

Auch hier gilt der vorige Satz, nämlich, daß alle Resonanzkurven, welche mit einem Kreise aufgenommen wurden, dessen Dämpfung nahe gleich ist der Dämpfung des Primärkreises, einander ähnlich sind, wenn bei allen das Auslöschen des Funkens bei derselben prozentualen Potentialamplitude zustande kommt.

Was die Deformation der Resonanzkurve betrifft, lehrt ein Vergleich des Ausdruckes (13) mit dem Ausdrucke (11), daß dieselbe jetzt viel kleiner ist, und zwar beiläufig etwa solche, als ob die Zeit bis zum Auslöschen des Funkens verdoppelt wäre.

Als Beispiel sei hier eine Kurve für  $\delta_1 T = 2$  angegeben:

$\eta =$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2
	1,18	1,15	1,13	1,11	1,10	1,06	1,04	1,03
	Mittel: 1,11							

Aus diesem Beispiele ist ersichtlich, daß in demjenigen Falle, daß das Auslöschen des Funkens nicht früher eintritt, als

die ursprüngliche Potentialamplitude auf etwa 7 Proz. herabsinkt, die Resonanzkurve sehr nahe normal herauskommt, falls sie mit einem Kreise aufgenommen wurde, dessen Dämpfung nahe der Dämpfung des Primärkreises gleich ist. Aus einer solchen Resonanzkurve gefundene reduzierte Dämpfung ist dann sehr nahe<sup>1)</sup> gleich der wahren.

Auf diese Weise gelangt man zu einer einfachen Methode zur approximativen Bestimmung der Zeit, nach welcher der Funke auslischt. Man nimmt eine Resonanzkurve mit einem Kreise mit möglichst kleiner Dämpfung auf, dann erhöht man die Dämpfung des Meßkreises um einen bekannten Betrag auf solche Größe, daß sie beinahe der Primärdämpfung gleich ist, und mißt dann eine zweite Resonanzkurve. Zieht man die bekannte Erhöhung der Dämpfung von derjenigen, welche aus der zweiten Resonanzkurve resultiert (falls diese normal verläuft) ab, dann erhält man die wahre Dämpfung, welche dem ersten Falle (Dämpfung des Meßkreises verschwindend klein) gehört. Aus der prozentualen Abweichung zwischen dem Mittelwerte, der aus der ersten Resonanzkurve gefunden wurde und dem wahren Werte kann man mit Hilfe des Proportionalitätsfaktors  $1/4,7$  die prozentuale Potentialamplitude berechnen, bei welcher das Auslöschten des Funkens eintritt.

Es seien noch aus den vorigen Ausdrücken einige Relationen abgeleitet für denjenigen Fall, daß durch Vergrößerung des Widerstandes die Dämpfung des Primärkreises erhöht wird.

Wir setzen dabei voraus, daß durch solche Erhöhung der Primärdämpfung die ursprüngliche Funkendämpfung nicht geändert wird, und daß das Auslöschten des Funkens wieder bei derselben Potentialamplitude stattfindet, oder daß der Ausdruck  $e^{-\delta_1 T}$  für beliebiges  $\delta_1$  konstant ist (d. h. daß  $T$  umgekehrt dem  $\delta_1$  proportional ist).

Unter diesen Voraussetzungen kann die Änderung der Dämpfung, die durch eine Vergrößerung des Primärwiderstandes hervorgerufen wurde, auf folgende drei Arten gemessen werden:

---

1) Der Unterschied kann etwa 2,5 Proz. betragen, ist also etwa den Versuchsfehlern gleich.

1. *Durch Aufnahme von Resonanzkurven* bei ursprünglicher und vergrößerter Primärdämpfung. Wird die Resonanzkurve mit einem Kreise von verschwindend kleiner Dämpfung aufgenommen, dann sind die aus derselben gefundenen Werte der Dämpfungen größer als die wahren. Da aber die Resonanzkurven (auf Grund der zweiten Voraussetzung) einander ähnlich sind, wird auch eine größere, der wahren aber proportionale Änderung resultieren. Also: Nach dieser Methode gefundene Dämpfungsänderung ist größer, der wahren aber proportional. Das Verhältnis der Dämpfungen ist aber richtig.

Wählt man einen Meßkreis mit größerer Dämpfung (so daß die Resonanzkurve normal verläuft), dann soll man die wahre Dämpfungsänderung<sup>1)</sup> erhalten.

2. *Durch Messung der Maximen* des resonierenden Meßkreises mit kleiner Dämpfung. Dem maximalen Stromeffekte entsprechender Ausschlag ist für ursprüngliche Dämpfung:

$$\alpha_{\max.} = K \frac{1}{\vartheta_1 \vartheta_2 (\vartheta_1 + \vartheta_2)}.$$

Ändert sich  $\vartheta_1$  um  $\vartheta_1^*$ , dann ist

$$\alpha_{\max.}^* = K \frac{1}{(\vartheta_1 + \vartheta_1^*) \vartheta_2 (\vartheta_1 + \vartheta_1^* + \vartheta_2)} \quad 2)$$

und das Verhältnis beider:

$$\frac{\alpha_{\max.}}{\alpha_{\max.}^*} = \frac{(\vartheta_1 + \vartheta_1^*) (\vartheta_1 + \vartheta_1^* + \vartheta_2)}{\vartheta_1 (\vartheta_1 + \vartheta_2)},$$

d. h. dieses Verhältnis ist dasselbe, als ob der Funken überhaupt nicht auslösche.

Rechnet man aus dem obigen Verhältnis die Summe der Dämpfungen  $\vartheta_1 + \vartheta_1^* + \vartheta_2$ , wobei sowohl  $\vartheta_1$  als auch  $\vartheta_2$  als bekannt vorausgesetzt werden, dann erhält man:

$$\vartheta_1 + \vartheta_1^* + \vartheta_2 = \frac{\vartheta_2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha_{\max.}}{\alpha_{\max.}^*} \vartheta_1 (\vartheta_1 + \vartheta_2) + \left(\frac{\vartheta_2}{2}\right)^2},$$

d. h. es resultiert der wahre Wert.

In Wirklichkeit kennt man aber nicht den wahren Wert  $\vartheta_1$ , sondern denjenigen, welcher aus einer Resonanzkurve gefunden

1) Über die Schwierigkeiten, welche sich einer praktischen Durchführung dieser Methode entgegenstellen, wird später (p. 966) berichtet.

2) Die Größe  $K$  ist auf Grund der zweiten Voraussetzung konstant.

wurde. Wenn  $\vartheta_2$  klein ist, dann überwiegt im obigen Ausdrucke das zweite Glied, der in diesem Falle annähernd gleich

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2) \sqrt{\frac{\alpha_{\max.}}{\alpha_{\max.}}}$$

gesetzt werden kann. Nimmt man somit in Rechnung denjenigen Wert von  $(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ , welcher aus einer mit einem Meßkreise von kleiner Dämpfung aufgenommenen Resonanzkurve gefunden wurde, welcher also in einem bestimmten Verhältnis größer ist als der wahre, dann ist auch der Wert von  $(\vartheta_1 + \vartheta_1^* + \vartheta_2)$ , welcher aus den maximalen Effekten berechnet wurde, in demselben Verhältnis größer. Also: *Die Dämpfungsänderung, welche aus der Änderung des maximalen Effektes auf Grund desjenigen Wertes von  $(\vartheta_1 + \vartheta_2)$  berechnet wird, welcher aus einer Resonanzkurve gefunden wurde, ist gleich derjenigen, welche nach der ersten Methode aus zwei Resonanzkurven erhalten wurde.*

3. *Durch Messung des Stromeffektes in einem einfachen Meßkreise (ohne Kapazität), welcher lose induktiv mit dem Primärkreise gekoppelt ist.*

Der Stromeffekt in einem solchen Kreise ist gegeben durch den Ausdruck (7), wenn man in demselben setzt:

$$b_2 = 0, \quad \omega_2 = 0.$$

Da man aber  $\vartheta_1^2$  und  $\vartheta_2^2$  gegen 1 vernachlässigen kann, resultiert:

$$\psi_{(2,2)} = \frac{L_{21}^2 C_1^2 V_{11}^2 \sqrt{b_1}}{4 L_{22}^2} (1 - e^{-2\lambda_1 T}) \frac{1}{\vartheta_1},$$

oder der dem Stromeffekte entsprechende Ausschlag:

$$\beta = K \frac{1}{\vartheta_1},$$

wo  $K$  auf Grund der zweiten Voraussetzung<sup>1)</sup> wieder konstant ist. Ändert sich  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_1^*$ , dann ist

$$\beta^* = K \frac{1}{\vartheta_1 + \vartheta_1^*}$$

1) Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, dann entsteht jetzt ein weit kleinerer Fehler als im vorigen Falle, da der Stromeffekt in diesem Falle nur sehr wenig vom Auslösen des Funkens abhängig ist.

und das Verhältnis beider

$$\frac{\beta}{\beta^*} = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_1^*}{\vartheta_1},$$

d. h. dieses Verhältnis ist wieder dasselbe, als ob der Funken überhaupt nicht auslösche, und es gilt somit von dieser Methode dasselbe wie von der zweiten.

#### Zusammenstellung der Ergebnisse der Theorie.

Ein frühzeitiges Auslöschen des Funkens verursacht solche Deformation der Resonanzkurve, daß die aus derselben gefundenen reduzierten Dämpfungen zu groß ausfallen und daß die Werte derselben vom Gipfel abnehmen (für ein spätes Auslöschen nur bis zu gewisser Höhe, von welcher sie wieder zunehmen).

Die Deformation hängt von der Dämpfung des Meßkreises in der Weise ab, daß sie am größten ist, wenn diese gegenüber der Primärdämpfung klein ist. Mit wachsender Sekundärdämpfung nimmt die Deformation ab, und die Resonanzkurve wird normal, sobald die Sekundärdämpfung der Primärdämpfung etwa gleich geworden ist (vorausgesetzt, daß das Auslöschen nicht früher stattfand, bevor die Potentialamplitude auf etwa 7 Proz. des ursprünglichen Wertes gesunken ist). Auf Grund dieser Eigenschaft der Deformation kann der wahre Wert der Dämpfung und somit auch die scheinbare, durch frühzeitiges Auslöschen bewirkte Änderung derselben, gefunden werden.

Eine Änderung der Primärdämpfung wird größer, der wahren aber proportional gefunden, wenn sie aus der, durch einen wenig gedämpften Meßkreis aufgenommenen Resonanzkurve gewonnen wird. Ist aber der Meßkreis etwa so stark wie der Primärkreis gedämpft, dann soll die wahre Änderung resultieren.

Wird dagegen die Änderung aus den maximalen Effekten eines resonierenden Meßkreises, oder aus den Stromeffekten eines einfachen Kreises gefunden, dann wird sie der wahren gleich, oder in demselben Maße größer wie in dem vorigen Falle, je nachdem ob man für die Primärdämpfung ihren wahren Wert kennt oder denjenigen, der aus der Resonanzkurve (die mit wenig gedämpftem Meßkreis aufgenommen wird) resultiert, der Rechnung zugrunde legt.

## II. Experimenteller Teil.

Die Primärkapazität wurde durch ein großes Induktorium von 45 cm Schlagweite (von M. Kohl) geladen, als Speisestrom wurde der Stadtstrom (110 Volt und 50 Perioden) benutzt. Das Induktorium wurde mit der Kapazität beiläufig auf den Stadtstrom abgestimmt.

Die Primärkapazität bestand aus zwei nebeneinander geschalteten Leidener Flaschen von der Kapazität  $5,28 \cdot 10^{-3}$  Mf. (für benutzte Schwingungszahl) und von einer kleinen reduzierten Dämpfung aus Hysteresis (etwa 0,0020). Die Selbstinduktion des Primärkreises bildete eine Spule (20 Windungen von 7,1 cm Durchmesser) aus Kupferdraht von 2 mm Dicke. Außerdem enthält der Entladungshahn eine Windung desselben Drahtes von 7,0 cm Durchmesser mit zwei 70 cm langen in einem Abstand von 0,5 cm stehenden Zuleitungen. Diese Windung wirkte durch Induktion auf eine kongruente, welche sich im veränderlichen Abstände im Meßkreise befindet. Der gesamte Selbstinduktionskoeffizient (samt Verbindungsdrähten) des Primärkreises beträgt 20400 cm. Die Pole der Funkenstrecke bildeten (bis auf einige Ausnahmen, die an entsprechender Stelle angegeben sind) zwei kongruente Ringe aus Zink von 7,5 cm Durchmesser und 2,3 cm Dicke. Die Vergrößerung der Primärdämpfung geschah durch Einschalten entsprechender Drähte aus Argentan von 0,2 mm Dicke im Ölbad.

Der Meßkreis bestand aus einem veränderlichen Luftkondensator (von H. Boas, kalibriert nach der Maxwellschen Methode) aus einer Selbstinduktionsspule (35 Windungen von 11,2 cm Durchmesser aus 2 mm dickem Kupferdraht) und aus dem oben erwähnten Kreise mit langen Zuleitungen. Der gesamte Selbstinduktionskoeffizient betrug 87200 cm. Der gegenseitige Induktionskoeffizient wurde zwischen 15—60 cm, je nach der Größe der Sekundärdämpfung geändert, und wurde immer so klein gehalten, daß der Ausdruck  $k^2/4 \vartheta_1 \vartheta_2$  gegen 1 vernachlässigbar klein war.<sup>1)</sup> Zur Erhöhung des Widerstandes wurde entsprechend langer 0,02 cm dicker Draht aus Kon-

1) Dadurch wurde die Entstehung der Wienschen Deformation verhindert (p. 969).

stantan benutzt. Das Thermoelement war eine Kombination von Konstantan und Platin (Drähte von 0,02 mm Durchmesser) und war in einem einfachen Kreise (ohne Kapazität) eingeschaltet, dessen Induktanz groß gegenüber dem Widerstande des Thermoelementes war und der lose mit dem Meßkreise induktiv gekoppelt war. Das benutzte Galvanometer (Drehspulgalvanometer von Edelmann) hatte bei ca. 4000  $\Omega$  Widerstand die Empfindlichkeit  $2 \cdot 10^{-6}$  Volt pro 1 mm Skalenausschlag.

Nicht zu kleine Schwierigkeiten bei den Messungen verursacht die zeitliche Veränderung des Funkens, welche sich besonders durch eine Abnahme des maximalen Effektes (in einigen Fällen ging der Abnahme eine bedeutende Zunahme voraus) zum Vorschein kommt. Zur Erhaltung genügender Konstanz hatte sich am besten folgendes Verfahren erwiesen: Die Pole der Funkenstrecke wurden vor jeder Messung mit Schmirgelpapier gereinigt und jede Resonanzkurve zuerst bei zunehmender und dann bei abnehmender Kapazität (ohne Unterbrechen der Entladung) aufgenommen. Differierten die Ausschläge um mehr als 5 Proz., dann wurde die Resonanzkurve als unbrauchbar ausgeschieden und eine neue (nach neuer Reinigung der Pole) aufgenommen.

Im Falle, daß eine Reihe von Resonanzkurven gemessen wurde, wurde eine Kontrolle, daß während der ganzen Reihe die Verhältnisse sich nicht änderten, dadurch durchgeführt, daß nach der Beendigung der Reihe nochmals in umgekehrter Reihenfolge die maximalen Ausschläge kontrolliert wurden. Bei kurzen Reihen, welche nur aus 3—4 Resonanzkurven bestanden, konnte eine Übereinstimmung auf 1—2 Proz. erzielt werden. Bei größeren Differenzen wurden aus solchen Reihen keine Folgerungen gezogen.

Zum Vergleich der Theorie mit wirklich vorkommenden Tatsachen sind im folgenden einige Beispiele der Messungen angeführt.

*Die Abnahme der Deformation der Resonanzkurve mit wachsender Primärdämpfung ist aus der Tab. II ersichtlich (wo  $l$  die Funkenlänge bedeutet).*

Tabelle II.

 $l = 3,0 \text{ mm}, \vartheta_2 = 0,0038.$ 

$\vartheta_1^*$	0,0000	0,0120	0,0254
$\eta$	$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1^*$		
0,9	0,0336	0,0435	0,0525
0,8	0,0336	0,0444	0,0530
0,7	0,0335	0,0441	0,0530
0,6	0,0327	0,0433	0,0533
0,5	0,0316	0,0421	0,0534
0,4	0,0303	0,0414	0,0530
0,3	0,0296	0,0403	
0,2	0,0272	0,0388	

Während die erste, mit einem Meßkreise von kleiner Dämpfung aufgenommene, Resonanzkurve eine beträchtliche Deformation aufweist, ist die letzte, bei welcher die Sekundärdämpfung der Primärdämpfung etwa gleich ist, in Grenzen der Versuchsfehler genügend normal.

Zieht man von dem Mittelwerte der letzten Kurve 0,0531 den zugegebenen Betrag 0,0254, dann bleibt für die wahre Summe der Dämpfungen nur 0,0277 übrig, während aus der ersten Kurve ein Wert von 0,0323, also um 16 Proz. größer resultiert.

Diejenige Tatsache, daß die Deformation der Resonanzkurve bei Änderung der Primärdämpfung konstant bleibt, ist aus der Tab. III ersichtlich.

Tabelle III.

 $l = 1,1 \text{ mm}, \vartheta_2 = 0,0038.$ 

$\vartheta_1^*$	0,0000	0,0067	0,0181
$\eta$	$\vartheta_1 + \vartheta_1^* + \vartheta_2$		
0,9	0,0329	0,0449	0,0591
0,8	0,0320	0,0435	0,0582
0,7	0,0313	0,0418	0,0576
0,6	0,0306	0,0401	0,0558
0,5	0,0298	0,0384	0,0537
0,4	0,0283	0,0361	0,0511
0,3	0,0265	0,0358	0,0481
0,2	0,0240	0,0303	



Obwohl diese Tabelle größere prozentuale Änderung der Summe der Dämpfungen aufweist als die vorige, von der sie sich nur dadurch unterscheidet, daß im vorigen Falle die Sekundärdämpfung, in diesem die Primärdämpfung geändert wurde, war die Deformation doch ungeändert geblieben (ähnliches Verhalten zeigt auch in Tab. V und VI die erste und zweite Spalte).

Berechnet man aus den Dämpfungen der Tab. III die Breiten der Resonanzkurven so, daß man diejenige, welche den Mittelwerten entsprechen, untereinander gleich lang wählt, und fügt (auf den letzten Platz) noch die Breiten einer normalen Resonanzkurve hinzu, dann resultiert folgende Tab. IIIa.

Tabelle IIIa.

$\eta$	Breite der Resonanzkurve			
0,9	0,36 <sub>0</sub>	0,37 <sub>4</sub>	0,35 <sub>4</sub>	0,33 <sub>2</sub>
0,8	0,52 <sub>4</sub>	0,54 <sub>2</sub>	0,52 <sub>5</sub>	0,50 <sub>0</sub>
0,7	0,67 <sub>1</sub>	0,68 <sub>4</sub>	0,68 <sub>0</sub>	0,65 <sub>5</sub>
0,6	0,81 <sub>0</sub>	0,81 <sub>0</sub>	0,82 <sub>1</sub>	0,81 <sub>7</sub>
0,5	0,97 <sub>8</sub>	0,96 <sub>6</sub>	0,96 <sub>8</sub>	1,00
0,4	1,14	1,10	1,13	1,25
0,3	1,33	1,37	1,32	1,53
0,2	1,57	1,55		2,00

Vergleicht man die ersten drei Spalten untereinander, dann sieht man, daß die Breiten in Grenzen der Versuchsfehler untereinander übereinstimmen. Diese Übereinstimmung beweist, daß die Resonanzkurven bei Änderung des Primärwiderstandes sich einander ähnlich bleiben, und daß also auch die Voraussetzung erfüllt ist, daß das Auslöschens des Funkens bei derselben prozentualen Potentialamplitude stattfindet. Man darf aber dabei nicht vergessen, daß die Deformation nur ein unempfindliches Kriterium für die Zeit des Auslöschens darbietet.

Zieht man vor dem Mittelwerte der zweiten und dritten Resonanzkurve den Mittelwert der ersten Kurve, dann bekommt man für die Änderung der Primärdämpfung

$$0,0400 - 0,0305 = 0,0095 \quad \text{und} \quad 0,0555 - 0,0305 = 0,0250.$$

Diese Werte sind aber gegenüber den wahren 0,0067 und 0,0181 1,42 mal bzw. 1,38 mal größer und sie bestätigen somit die Forderung der Theorie (unter Voraussetzung, daß eine Änderung des Primärwiderstandes die Funkendämpfung nicht ändert, wie auch aus dem vorigen wahrscheinlich ist<sup>1)</sup>), daß die aus den Resonanzkurven gefundenen Änderungen zwar größer als die wahren sind, denselben aber proportional.

Die maximalen Ausschläge für denselben Fall (Tab. III) waren:

95,9    52,4    25,6.

Aus diesen Zahlen resultiert für ganze reduzierte Dämpfung  $\vartheta_1 + \vartheta_1^* + \vartheta_2$ , wenn man für ursprünglichen Wert der Dämpfung den Mittelwert der ersten Kurve wählt:

0,0406    und    0,0572.

Diese Zahlen unterscheiden sich aber von den Mittelwerten der zweiten und dritten Resonanzkurve (0,0400 und 0,0555) nur um 1,5 Proz. bzw. 3 Proz.

Die in einem einfachen Meßkreise gemessenen Ausschläge waren:

73,6    61,0    39,6.

Die prozentuale Änderung der Dämpfungen ist somit gegeben durch die Zahlen

1,27    1,82,

während aus den Werten, die aus den Resonanzkurven gefunden wurden, resultiert:

1,31    1,85.

Die Zahlen stimmen also wieder in Grenzen der Versuchsfehler überein.

Es wird somit auch bestätigt die Forderung der Theorie, daß die Änderungen der Dämpfung, gleichviel ob sie aus den Resonanzkurven oder aus den Maximalausschlägen in resonierenden Kreisen, oder aus Ausschlägen in einfachen Kreisen gewonnen werden, miteinander übereinstimmen sollen.

Die Beobachtungen der Tab. III können durch folgende ergänzt werden.

<sup>1)</sup> Vgl. auch weiter unten.

Tabelle IV.

 $l = 1,1 \text{ mm}, \vartheta_2 = 0,0035.$ 

$\vartheta_2^*$	0,0000	0,0233
$\eta$	$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_2^*$	
0,9	0,0352	0,0464
0,8	0,0333	0,0475
0,7	0,0319	0,0473
0,6	0,0309	0,0465
0,5	0,0296	0,0460
0,4	0,5280	0,0460
0,3	0,0260	0,0475
0,2	0,0235	

Mittel

0,0307

Mittel

0,0467

Aus dieser Tabelle ist wieder ersichtlich, daß für kleine Sekundärdämpfung die Resonanzkurve stark deformiert, für große Sekundärdämpfung dagegen fast normal ist. Zieht man die zugegebene Dämpfung (0,0233) von dem Mittelwerte (0,0467), dann bleibt als wahre ursprüngliche Dämpfung 0,0234, während aus der ersten Resonanzkurve 0,0307 resultiert, also ein um 31 Proz. größerer Wert. Da aber die zweite Resonanzkurve noch ein bischen abnormal verläuft, ist die Zahl 0,0467 noch zu groß, und die aus dieser gefundene ursprüngliche wahre Dämpfung ist somit noch zu groß, d. h. die aus der ersten resultierte Dämpfung ist um mehr als 31 Proz. größer als die wahre. Vergleicht man aber dieses Resultat mit der früher gefundenen Abweichung von 40 Proz. (Mittel aus 42 Proz. und 38 Proz.), dann sieht man, daß durch die Vergrößerung des Primärwiderstandes die Funkendämpfung höchstens nur um einige Prozent der zugegebenen Dämpfung zugenommen hat, und daß dieser Zuwachs bedeutend kleiner ist als derjenige, der durch frühzeitiges Auslöschen des Funkens entstanden ist.<sup>1)</sup>

1) Dieses Resultat stimmt mit demjenigen von Gerth (Diss. Halle 1909) gefundenen überein. Durch Umrechnung der Gerthschen Angaben findet man, daß in seinem Falle die Funkendämpfung bei Vergrößerung der Primärdämpfung um etwa 10 Proz. der zugegebenen Dämpfung zugenommen hat. Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß auch diese 10 Proz. von einem frühzeitigen Auslöschen des Funkens herrühren, denn es ist bei Gerth nicht angegeben, ob die Resonanzkurven vollkommen normal waren.

Vergleicht man untereinander die Tabb. II und IV, denen die Funkenlängen 3,0 mm und 1,1 mm gehören, dann bemerkt man, daß kleinere Funkenlänge (Tab. IV) größere Deformation aufweist, und in Übereinstimmung mit dieser Tatsache ist die bei kleinerer Funkenlänge gefundene Dämpfung um 31 Proz. (mindestens) größer, bei größerer dagegen nur um 16 Proz. Der Funken löscht somit aus, im Einklang mit bekannten Wienschen Versuchen, früher bei kleinerer als bei größerer Funkenlänge.

Es seien auch Beobachtungen angeführt und diskutiert, welche zwar seltener vorkommen, mit der Theorie aber nicht so gut übereinstimmen.

Tabelle V.

$$l = 10 \text{ mm}, \quad \vartheta_2 = 0,0055.$$

$\vartheta_1^*$	0,0000	0,0181	0,0000	0,0181
$\vartheta_2^*$	0,0000	0,0000	0,0234	0,0234
$\eta$	$\vartheta_1 + \vartheta_1^* + \vartheta_2 - \vartheta_2^*$			
0,9	0,0367	0,0602	0,0479	0,0791
0,8	0,0340	0,0578	0,0489	0,0768
0,7	0,0325	0,0561	0,0491	0,0748
0,6	0,0315	0,0533	0,0487	0,0737
0,5	0,0301	0,0524	0,0479	0,0718
0,4	0,0289	0,0500	0,0469	0,0702
0,3	0,0274	0,0467	0,0465	
0,2	0,0251			

Tabelle VI.

$$l = 2,0 \text{ mm}, \quad \vartheta_2 = 0,0055.$$

$\vartheta_1^*$	0,0000	0,0181	0,0000	0,0181
$\vartheta_2^*$	0,0000	0,0000	0,0234	0,0234
$\eta$	$\vartheta_1 + \vartheta_1^* + \vartheta_2 + \vartheta_2^*$			
0,9	0,0342	0,0520	0,0469	0,0704
0,8	0,0308	0,0510	0,0463	0,0687
0,7	0,0291	0,0504	0,0457	0,0679
0,6	0,0285	0,0487	0,0446	0,0662
0,5	0,0274	0,0473	0,0442	0,0653
0,4	0,0266	0,0453	0,0441	0,0639
0,3	0,0256	0,0425	0,0438	0,0634
0,2	0,0239			

Diese Beobachtungen bestätigen einerseits, daß durch eine Vergrößerung der Primärdämpfung die Deformation der Resonanzkurve nicht merklich geändert wird, wie die ersten und dritten Spalten beider Tabellen zeigen, andererseits, daß durch eine Vergrößerung der Sekundärdämpfung die Deformation sehr bedeutend verkleinert wird, wie wieder aus einem Vergleiche der ersten und dritten und zweiten und vierten Spalten beider Tabellen ersichtlich ist. Man sieht hier auch, daß die ersten Spalten mit den dritten eine größere Abnahme der Deformation ausweisen als die zweiten mit den vierten, was mit der Theorie übereinstimmt, nach welcher die Abnahme der Deformation von dem Verhältnisse der Änderung der Sekundärdämpfung zur Primärdämpfung (das im zweiten Falle kleiner ist) abhängig ist.

Obwohl somit eine qualitative Übereinstimmung mit der Theorie besteht, bestätigen sich quantitativ die Änderungen nicht. Zieht man die zugegebene Dämpfung (0,0234) von den Mittelwerten der dritten Spalten ab, dann resultiert für die wahre Dämpfung

$$0,0483 - 0,0234 = 0,0249 \quad \text{bzw.} \quad 0,0450 - 0,0234 = 0,0216,$$

also Werte, gegenüber welchen die Mittelwerte der ersten Spalten 0,0314 und 0,0285 um 26 bzw. 37 Proz. größer sind, d. h. für eine kleinere Funkenlänge tritt nach diesem ein späteres Auslöschen des Funkens als für eine längere ein.<sup>1)</sup> Zieht man dagegen die Mittelwerte der zweiten und ersten Spalten voneinander ab, dann bekommt man als gemessene Erhöhung der Primärdämpfung

$$0,0539 - 0,0314 = 0,0225 \quad \text{und} \quad 0,0485 - 0,0285 = 0,0200,$$

also gegenüber dem wahren Werte 0,0181 um 24 Proz. bzw. 10 Proz. größere Werte; die Deformation ist in diesem Falle richtig größer für eine kleinere Funkenstrecke als für eine längere, und sie stimmt auch für den Fall der kleineren Funkenstrecke ganz gut mit vorigem, für den Fall der größeren Funkenstrecke ist dieselbe aber zu klein.

1) Diese Unübereinstimmung wird aber auch durch Berücksichtigung der zurückgebliebenen Deformationen in den dritten Spalten nicht verbessert.

Die Ursache dieser Unübereinstimmungen ist in erster Reihe in den Versuchsfehlern zu suchen. Bezeichnet man die bei kleiner Primär- und Sekundärdämpfung gefundene Dämpfung  $\vartheta_1$ , diejenige bei erhöhter Primärdämpfung  $\vartheta_{II}$  und diejenige bei erhöhter Sekundärdämpfung  $\vartheta_{III}$ , und setzt man schließlich voraus, daß bei allen Messungen derselbe prozentuale Fehler  $\Delta$  vorkommt, dann ergibt sich bei Erhöhung der Sekundärdämpfung folgender prozentueller Unterschied zwischen  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_{III} - \vartheta_2^*$ :

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_1(1 \pm \Delta)}{\vartheta_{III}(1 \pm \Delta) - \vartheta_2^*} &= \frac{\vartheta_1(1 \pm \Delta)}{(\vartheta_{III} - \vartheta_2^*) \left(1 \pm \frac{\vartheta_{III} \Delta}{\vartheta_{III} - \vartheta_2^*}\right)} \\ &= \frac{\vartheta_1}{\vartheta_{III} - \vartheta_2^*} \left[1 \pm \Delta \left(1 \pm \frac{\vartheta_{III}}{\vartheta_{III} - \vartheta_2^*}\right)\right]. \end{aligned}$$

Da aber  $\vartheta_{III}$  etwa zweimal so groß ist als  $\vartheta_2^*$ , kann der Fehler auch bis dreimal so groß sein als derjenige der einzelnen Angaben, und also bei einem Versuchsfehler von 3 Proz. (welcher Betrag den bei diesen Messungen früher schon erwähnten Schwierigkeiten entspricht) kann die Abweichung, welche ihren Ursprung in frühzeitigem Auslöschen des Funkens hat, bis um  $\pm 9$  Proz. (des ursprünglichen Wertes) von der gefundenen differieren [somit liegen in unserem Falle die wahren Werte zwischen den Grenzen  $(26 \pm 9$  Proz.) und  $(32 \pm 9$  Proz.)].

Bei einer Erhöhung der Primärdämpfung resultiert analog:

$$\frac{\vartheta_{II}(1 + \Delta) - \vartheta_1(1 + \Delta)}{\vartheta_1^*} = \frac{\vartheta_{II} - \vartheta_1}{\vartheta_1^*} \left(1 \pm \frac{\vartheta_{II} \pm \vartheta_1}{\vartheta_{II} - \vartheta_1} \Delta\right).$$

Es ist aber wieder  $\vartheta_{II}$  etwa zweimal so groß wie  $\vartheta_1$ , also der Fehler des Resultates kann wieder etwa bis dreimal so groß sein wie der Versuchsfehler, also wieder bis  $\pm 9$  Proz. [Die wahren Werte liegen somit in diesem Falle wieder in den Grenzen  $(27 \pm 9$  Proz.) und  $(10 \pm 9$  Proz.).] Außerdem kann in diesem Falle die mit der Erhöhung der Primärdämpfung zusammenhängende Vergrößerung der Funkendämpfung mitwirken.

Aber noch in einem Punkte stimmen die Tab. V und VI nicht mit der Theorie. Nach der Theorie soll eine bei großer Sekundärdämpfung gemessene Dämpfung der wahren gleich sein. Es soll somit als Differenz der Mittelwerte der vierten und dritten Spalten die zugegebene Dämpfung 0,0181 resultieren, in Wirklichkeit resultiert aber  $0,0737 - 0,0483 = 0,0254$  für die kleinere, und  $0,0664 - 0,0450 = 0,0210$  für die längere Funkenstrecke. Der Grund für diesen Fehler ist in erster Reihe darin zu suchen, daß die zu diesen Spalten gehörigen Resonanzkurven nicht normal sind, und außerdem die vierten Spalten eine größere Deformation als die dritten aufweisen. Es sind somit beide Glieder der Differenz zu groß, und der Minuend ist außerdem mehr vergrößert als der Subtrahend. Es muß somit die Differenz größer als der wahre Wert ausfallen. (Auch in allen übrigen Beobachtungen, welche der vierten Spalte entsprachen, war die Resonanzkurve noch abnormal und die Differenz im Einklang mit dieser Tatsache zu groß.) Für die zurückgebliebene Deformation als Grund des Fehlers spricht auch, daß bei größerer zurückgebliebener Deformation<sup>1)</sup> (für kleinere Funkenstrecke) auch der Fehler größer ist.

Aber auch die Versuchsfehler können in diesem Punkte sehr beträchtliche Abweichungen zur Folge haben. Bei Benutzung der früheren Bezeichnungen erhält man:

$$\vartheta_{IV}(1 \pm \Delta) - \vartheta_{III}(1 \pm \Delta) = (\vartheta_{IV} - \vartheta_{III}) \left( 1 \pm \frac{\vartheta_{IV} \pm \vartheta_{III}}{\vartheta_{IV} - \vartheta_{III}} \Delta \right).$$

Es ist aber in unserem Falle die Summe  $(\vartheta_{IV} + \vartheta_{III})$  etwa fünfmal so groß als die Differenz  $(\vartheta_{IV} - \vartheta_{III})$  und es könnte somit im Resultat ein Fehler bis zu 15 Proz. entstehen (unter der Voraussetzung, daß  $\Delta$  wie früher gleich 3 Proz. gesetzt wird). Dieser Fehler, welcher sowohl eine Vergrößerung als auch eine Verkleinerung des Resultates zur Folge haben könnte, ist aber kleiner als derjenige aus der zurückgebliebenen De-

1) Die größere zurückgebliebene Deformation ist auch ein Zeichen dafür, daß der Funke früher auslicht, und daß also das umgekehrte, aus den ersten und dritten Spalten resultierende Resultat von Versuchsfehlern herrührt.

formation, und aus diesem Grunde resultiert die Differenz immer zu groß.

Es scheint, als ob durch Vergrößerung des Sekundärwiderstandes befriedigendere Resultate erzielt werden können. Aber auch dieser Weg führt nicht zum Ziele, denn bei jeder bedeutenderen ursprünglichen Deformation<sup>1)</sup> bleibt die Resonanzkurve auch bei Vergrößerung des Sekundärwiderstandes doch noch etwas deformiert (und in unserem letzten Falle hat auch kleine zurückgebliebene Deformation großen Einfluß auf das Resultat, da es sich um Differenzen handelt) und außerdem wäre dadurch die von den Versuchsfehlern stammende Abweichung nicht verkleinert, und schließlich würde man durch eine entsprechend große Vergrößerung der Dämpfung zu so großen Werten derselben gelangen, so daß eine Frage entstehen könnte, ob wieder die übliche einfache Rechnung aus Resonanzkurven mit nicht zu großen Fehlern begleitet wäre.

Aus diesen Gründen können diejenigen Forderungen der Theorie, bei welchen Messungen bei großer Sekundärdämpfung und vergrößerter Primärdämpfung vorkommen, durch Versuch nicht einwandsfrei kontrolliert werden, da in diesem Falle sehr große Fehler nicht ausgeschlossen sind. Es bleibt somit als beste Methode zur Untersuchung des frühzeitigen Auslöschens des Funkens die Aufnahme der Resonanzkurve bei kleiner und großer Sekundärdämpfung (ohne Vergrößerung der Primärdämpfung, wodurch auch die dadurch möglicherweise entstandene Änderung der Funkendämpfung ausgeschlossen ist). Auf diese Weise wurden die in den Tab. VII und VIII angeführten Messungen erhalten, bei welchen solche Verhältnisse gewählt wurden, bei denen ein frühes Auslösch des Funkens zu erwarten ist. Und zwar wurde in Tab. VII eine mehrfache Funkenstrecke gewählt, in Tab. VIII eine unsymmetrische. Die mehrfache Funkenstrecke wurde aus sechs Stangen aus Zink gebildet von 1,1 cm Durchmesser, welche 0,8 mm voneinander entfernt in einem Ebonitrahmen einander parallel um die Achse drehbar eingesetzt wurden. Es entstanden somit fünf Funken von je 0,8 mm Länge. Die unsymmetrische

1) Für kleine Deformationen, d. h. wenn der Funken spät auslicht, hat wieder diese ganze Messung keine Bedeutung.



Funkenstrecke bestand aus einer Kupferplatte als einem Pol, und einem abgerundeten (2 mm Durchmesser) Kupferdrahte als zweitem Pol.

Tabelle VII.

$$l = 5 \times 0,8 \text{ mm}, \quad \vartheta_1 = 0,0035.$$

$\vartheta_2^*$	0,0000	0,0186
$\eta$	$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_2^*$	
0,9	0,0434	0,0459
0,8	0,0415	0,0466
0,7	0,0402	0,0467
0,6	0,0389	0,0460
0,5	0,0372	0,0468
0,4	0,0353	0,0464
0,3	0,0330	0,0456
	Mittel 0,0386	Mittel 0,0465

Tabelle VIII.

$$l = 5,0 \text{ mm}, \quad \vartheta_1 = 0,0035.$$

$\vartheta_2^*$	0,0000	0,0234
$\eta$	$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_2^*$	
0,9	0,0345	0,0515
0,8	0,0355	0,0524
0,7	0,0341	0,0516
0,6	0,0337	0,0504
0,5	0,0322	0,0491
0,4	0,0307	0,0483
0,3	0,0294	0,0473
0,2	0,0262	
	Mittel 0,0336	Mittel 0,0504

Bei der mehrfachen Funkenstrecke ist die bei größerer Sekundärdämpfung aufgenommene Resonanzkurve wieder normal. Zieht man von dem Mittelwerte der aus derselben resultierenden Dämpfungen (0,0465) die zugegebene Dämpfung 0,0186, dann bleibt als wahre Dämpfung für die Kurve von kleinerer Sekundärdämpfung der Wert 0,0279, die erste Spalte der Tab. VII gibt aber im Mittel 0,0386, also einen um 39 Proz. größeren Wert.

Bei der asymmetrischen Funkenstrecke ist aber auch die zur größeren Sekundärdämpfung gehörige Resonanzkurve noch nicht normal, ein Zeichen dafür, daß der Funke sehr früh auslöscht, womit auch eine große Deformation der zur kleinen Sekundärdämpfung gehörigen Resonanzkurve (Tab. VIII, Spalte 1) übereinstimmt. (Setzt man durch einen Vergleich mit der Tab. I voraus, daß der Mittelwert der zweiten Spalte noch um etwa 8 Proz. größer ist, d. h., daß sein wahrer Wert 0,0464 ist, dann bekommt man durch Subtraktion der zugegebenen Dämpfung 0,0234, für die wahre Dämpfung der ersten Spalte 0,0230; der Mittelwert in der ersten Spalte (0,0336) ist somit um 46 Proz. größer.)

Dividiert man die prozentuale Abweichung der wahren und der gemessenen Dämpfung (welche durch die Aufnahme der Resonanzkurve bei kleiner Sekundärdämpfung gefunden wurde) durch die Zahl 4,7, dann bekommt man (nach p. 950) die prozentuale Potentialamplitude, bei welcher der Funke auslöscht. Auf diese Weise erhält man, daß der Funke auslöscht, wenn die Potentialamplitude gesunken ist:

auf 3,4 % (nach der Tab. II)

bei einer einfachen Funkenstrecke von 3,0 mm Länge

auf 6,6 % (nach der Tab. IV)

bei einer einfachen Funkenstrecke von 1,1 mm Länge

auf 8,3 % (nach der Tab. VII)

bei einer mehrfachen Funkenstrecke von  $5 \times 0,8$  mm Länge

auf etwa 9,8 % (nach der Tab. VIII)

bei einer asymmetrischen Funkenstrecke von 5,0 mm.

In dieser Übersicht werden die Zahlen, welche aus den am meisten vorkommenden Resonanzkurven resultieren, veranschaulicht, die seltenen Ausnahmefälle (Tabb. V und VII) sind dagegen ungeachtet geblieben. Die hier angegebenen Werte sind zwar nur als Näherungswerte zu betrachten, es bleibt aber doch sehr interessant, daß die Möglichkeit vorliegt, aus der Form der Resonanzkurve mindestens annähernd die Zeit zu bestimmen, in welcher der Funke auslöscht.

*Als Ergebnis der angeführten Messungen kann folgendes betrachtet werden:*

Es kommen so deformierte Resonanzkurven vor, bei welchen die aus ihnen gefundene Dämpfung vom Gipfel abnimmt, und deren Deformation nicht von einer zu engen Koppelung herührt (da sie durch Verkleinerung derselben nicht beeinflußt wird).<sup>1)</sup> Diese Deformation ist von der Primärdämpfung unabhängig, mit wachsender Sekundärdämpfung nimmt sie aber ab, so daß bei nicht zu großer Deformation die Resonanzkurve schließlich in eine normale (in Grenzen der Versuchsfehler) übergeht.

Alle diese Eigenschaften stimmen mit der Voraussetzung überein, daß die Deformation durch frühzeitiges Auslöschten des Funkens bedingt ist, und es ist auch möglich, durch Aufnahme von zwei Resonanzkurven (bei kleiner und großer Sekundärdämpfung) die Zeit des Auslöschens annähernd festzustellen.

Diejenigen Fälle, in welchen die Beobachtung mit der Theorie nicht übereinstimmt, können durch Versuchsfehler bzw. durch nicht genügend vollkommen realisierte theoretische Voraussetzungen erklärt werden.

Für die Dämpfungsmessungen an Oszillatoren, welche einen Funken enthalten, ergibt sich somit diese wichtige Regel: *Es sei die Dämpfung des Meßkreises nicht möglichst klein (wie es üblich angegeben wird), sondern etwa der gemessenen Dämpfung gleich gewählt.* Dadurch können nämlich die aus dem frühzeitigen Auslöschten des Funkens herrührenden Fehler ausgeschlossen werden.

#### Zusatz.

Die hier beschriebene Deformation der Resonanzkurve kann sehr leicht verwechselt werden mit derjenigen, welche M. Wien<sup>2)</sup> bei zu enger Koppelung des Meßkreises beobachtet. Dieselben werden aber als verschieden am einfachsten dadurch erkannt, daß die Wiensche Deformation durch Verkleinerung des Koppelungskoeffizienten verschwindet, die hier

1) Ein Beispiel dafür anzuführen, scheint mir überflüssig, da diese Tatsache schon lange bekannt ist (vgl. die weiter zitierte Arbeit von Drude).

2) M. Wien, Ann. d. Phys. 25. p. 625. 1908.

angeführte bleibt aber unverändert. Es soll aber damit nicht gesagt werden, daß die Wiensche Deformation *wesentlich* verschieden sein soll. Im Gegenteil bin ich der Meinung, daß M. Wien mit Recht einen engen Zusammenhang zwischen seiner Deformation und dem frühzeitigen Auslöschen des Funkens sieht, und es handelt sich wahrscheinlich bei seiner Deformation um ein frühzeitiges Auslöschen, welches durch engere Koppelung verursacht wird, und darum nimmt auch seine Deformation mit wachsender Koppelung zu. Betrachtet man also die Wiensche Deformation von diesem Standpunkte, dann erscheint dieselbe als ein Spezialfall derjenigen Deformationen, welche durch frühzeitiges Auslöschen des Funkens entstehen, und zwar ist die Ursache des Auslöschens eine zu enge Koppelung, während in unseren Fällen die Ursache in den Funken selbst liegt.

Es wird in der Literatur oft angeführt, daß die aufgenommenen Resonanzkurven nicht normal waren. Ein großer Teil dieser Abweichungen (besonders in älteren Messungen) ist in der Wienschen Deformation zu suchen, nicht aber alle. So z. B. schreibt P. Drude<sup>1)</sup> ausdrücklich (p. 718—719), daß die Werte der logarithmischen Dekremente unabhängig von dem Koppelungskoeffizienten waren, d. h. daß dasselbe genügend klein gewählt wurde, und doch waren die Kurven stark deformiert, wie aus den angegebenen Beispielen ersichtlich ist. Da aber die Funkenlänge klein war, kann man mit großer Wahrscheinlichkeit die Ursache der Deformationen im frühzeitigen Auslöschen des Funkens suchen.

Dem Hrn. Prof. Dr. V. Novák spreche ich meinen besten Dank für die Anschaffung der zu dieser Arbeit notwendigen Apparate aus.

Brünn, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule, Juli 1910.

---

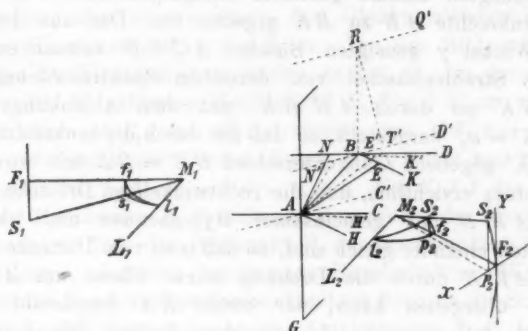
1) P. Drude, Ann. d. Phys. 18. p. 709. 1904.

(Eingegangen 28. Februar 1911.)

**7. Die Krümmung der Spektrallinien beim  
Plangitter;  
von Felix Biske.**

Nachdem die Krümmung der Spektrallinien beim Prisma festgestellt worden ist, liegt es nahe eine solche beim Gitter zu vermuten, doch ist mir darüber keine Untersuchung bekannt.

Es sei in der Figur  $F_1 M_1 = f_1$  die Brennweite des Kollimatorfernrohres,  $F_1 S_1 = s_1$  die halbe Höhe des in Brennebene vertikal stehenden Spaltes. Den aus dem Axialpunkte  $F_1$



ausgehenden Strahlen entspricht nach dem Austritte aus dem Kollimatorobjektive ein horizontales paralleles Strahlenbündel mit dem durch den Objektivmittelpunkt  $M_1$  gehenden Hauptstrahle  $F_1 M_1$  und den aus dem Scheitelpunkte  $S_1$  ausgehenden — entspricht ein in vertikaler Richtung um den Winkel

$$(1) \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{s_1}{f_1}$$

geneigtes paralleles Strahlenbündel mit dem Hauptstrahle  $S_1 M_1$ . Das Gitter  $G$  mit vertikalen parallel der Kante  $AG$  und dem Spalte  $F_1 S_1$  verlaufenden Furchen mag zuerst senkrecht zu der Kollimatorachse  $F_1 M_1$  stehen. Sei  $AB$  ein beliebiges

zu den Furchen senkrechttes Gitterelement zwischen zwei korrespondierenden Punkten  $A$  und  $B$  der Furchen. Das aus dem Kollimator ausgehende horizontale Strahlenbündel kann als zusammengesetzt aus ebenen, horizontalen, parallelen Strahlenbüscheln betrachtet werden, von denen das durch das Element  $AB$  direkt hindurchgehende durch  $ACBD$  dargestellt sei; ebenso das vertikal geneigte Strahlenbündel, dem das durch das Element  $AB$  direkt hindurchgehende, gegen  $ACBD$  um den Winkel  $\gamma$  geneigte ebene parallele Strahlenbüschel  $AC'BD'$  entsprechen mag. Nach dem Austritte aus dem Gitter, außer den direkt hindurchgehenden, entstehen noch gebeugte parallele Strahlenbüschel. Von diesen sei ein, aus dem horizontalen Büschel  $ACBD$  entstandenes, um den Beugungswinkel  $DBK = \alpha_2$  abgelenktes, durch  $AHBK$  dargestellt, wobei der im gebeugten Raume gebildete Gangunterschied  $BE$  durch die senkrechte  $AE$  zu  $BK$  gegeben ist. Das aus dem um den Winkel  $\gamma$  geneigten Büschel  $AC'BD'$  entstandene gebeugte Strahlenbüschel von derselben Spektralordnung wie  $AHBK$  sei durch  $AH'BK'$  mit dem Ablenkungswinkel  $D'BK' = \alpha_2'$  dargestellt, so daß der durch die senkrechte  $AE'$  zu  $BK'$  gegebene Gangunterschied  $BE' = BE$  sein wird. Es ist erstens ersichtlich, daß die rechtwinkligen Dreiecke  $AEB$  und  $A'E'B$  mit gemeinsamer Hypothenuse und gleichen Katheten einander gleich sind, so daß man vom Dreiecke  $AEB$  zum  $A'E'B$  durch die Drehung seiner Ebene um  $AB$  als Achse übergehen kann; der Strahl  $BK'$  beschreibt dabei den Mantel eines Kegels mit dem halben Öffnungswinkel  $ABK' = 90^\circ - \alpha_2$ . Auf diesem Kegelmantel ist zweitens der zu einem um den Winkel  $\gamma$  geneigten einfallenden Strahlenbüschel gehörige gebeugte Strahl  $BK'$  folgendermaßen eindeutig bestimmt. Nimmt man außer dem Punkte  $B$  noch einen beliebigen in derselben Vertikale liegenden Punkt  $R$  des Gitters und betrachtet man das um den Winkel  $\gamma$  geneigte vertikale einfallende Strahlenbüschel  $BD'RQ$ . In der Zeit, bis die einfallende Welle in  $R$  gelangt, pflanzt sich die gebeugte Welle vom Punkte  $B$  aus in einer Kugel vom Radius  $BT'$ , wenn  $RT'$  senkrecht zu  $BD'$  gelegt wird. Die direkt hindurchgehende und die gebeugten Wellenebenen werden gefunden, wenn man Tangentialebenen von  $R$  aus auf diese Kugel legt,

und die Richtungen des durch  $B$  direkt hindurchgehenden und der gebeugten Strahlen ergeben sich, wenn man von  $B$  aus die LÖte auf diese Tangentialebenen senkt. Es ergibt sich somit, wenn man die vertikal liegenden Punkte des Gitters in Betracht zieht, daß die zu dem in  $B$  einfallenden um den Winkel  $\gamma$  geneigten Strahle gehörigen gebeugten Strahlen, wie  $BK'$ , alle auch auf dem Mantel eines Kegels liegen mit der Achse  $BR$  und dem halben Öffnungswinkel  $RBK' = 90^\circ - \gamma$ .

Die Gesamtheit solcher Gitterelemente wie  $AB$  sendet daher, bei Berücksichtigung der in horizontalen und um den Winkel  $\gamma$  geneigten Ebenen einfallenden Strahlenbüschel, für die betreffende Ordnung parallel zu  $BK$  und zu  $BK'$  gerichtete gebeugte Strahlenbündel. Sei  $M_2 F_2 = f_2$  die Brennweite des Analysierfernrohres, das in die Richtung des horizontalen um den Winkel  $\alpha_2$  gebeugten Strahlenbündels eingestellt ist, also dessen durch den Objektivmittelpunkt  $M_2$  gehende Hauptstrahl  $M_2 F_2 \parallel BK$  ist. Um den Bildpunkt des geneigten Strahlenbündels zu finden genügt es, den durch den Mittelpunkt  $M_2$  gehenden Hauptstrahl  $M_2 S_2 \parallel BK'$  zu ziehen. Die Strahlen  $M_2 F_2$  und  $M_2 S_2$ , ähnlich wie  $BK$  und  $BK'$ , liegen auf dem Kegel, dessen Achse  $M_2 L_2 \parallel BA$  und halber Öffnungswinkel  $L_2 M_2 F_2 = 90^\circ - \alpha_2$  ist. Sei  $F_2 XY$  die senkrecht zur Brennweite  $M_2 F_2$  stehende Brennebene des Analysierfernrohres, so liegt der Bildpunkt  $S_2$  des Spaltpunktes  $S_1$  auf dem dadurch eindeutig bestimmten Kegelschnitte. Wird in dem zu der Kegelerzeugenden senkrechten Schnitte die Schnittlinie  $F_2 X$  mit dem horizontalen Axialschnitte  $F_2 M_2 L_2$  des Kegels zur  $+x$ -Achse und die dazu senkrechte Tangente  $F_2 Y$  des Kegels zur  $y$ -Achse gewählt, so ist die Scheitelgleichung des Kegelschnittes

$$(2) \quad y^2 = 2f_2 \cotg \alpha_2 x + (\cotg^2 \alpha_2 - 1)x^2.$$

Das zu  $S_1$  konjugierte Bildpunkt  $S_2$  ist noch auf diesem Kegelschnitte dadurch eindeutig bestimmt, daß, nach dem früheren, aus der Konstruktion  $M_2 S_2$  zur Horizontalebene  $L_2 M_2 F_2$  um den Winkel  $S_2 M_2 P_2 = \gamma$  geneigt liegt, so daß

$$(3) \quad S_2 P_2 = y = \sqrt{f_2^2 + x^2} \cdot \tg \gamma.$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) kann somit die Krümmungsabweichung  $F_2 P_2 = x$  bestimmt werden. Es ist geometrisch



und nach der Gleichung (2) ersichtlich, daß, wenn auch das Analysierfernrohr senkrecht zum Gitter steht,  $\alpha_2 = 0$ , der Kegelschnitt zur  $y$ -Achse,  $x = 0$  wird, d. h. keine Krümmung der Spektrallinie stattfindet; wächst der Beugungswinkel, so ist für  $\alpha_2 < 45^\circ$  der Kegelschnitt eine Hyperbel, für  $\alpha_2 = 45^\circ$  ist er eine Parabel und für  $\alpha_2 > 45^\circ$  ist Ellipse, wobei die Scheitelkrümmung der Spektrallinie allmählich wächst.

Es sei jetzt der allgemeine Fall betrachtet, wo das Gitter  $G$  nicht senkrecht zur Kollimatorachse  $F_1 M_1$  steht, sondern seine Normale den Winkel  $\alpha_1$  mit dieser einschließt. Sei in dem durch das Gitterelement  $AB$  direkt hindurchgehenden horizontalen Strahlenbüschel  $ACBD$  die senkrechte zur einfallenden Strahlenrichtung durch  $AN$  mit dem Winkel  $BAN = \alpha_1$  und der objektseitige Gangunterschied durch  $BN$  dargestellt. Ebenso sei in dem vertikal geneigten Strahlenbüschel  $AC'BD'$  die Strahlensenkrechte durch  $AN'$  mit dem Winkel  $BAN' = \alpha_1'$  und der Gangunterschied durch  $BN'$  dargestellt. Es ist klar, daß in dem in vertikaler Richtung geneigten Strahlenbüschel der Winkel  $ABN'$  größer als der im horizontalen Büschel liegende Winkel  $ABN$  und somit der Gangunterschied  $BN'$  kleiner als  $BN$  ist; soll daher im Spektrum derselben Ordnung die Gesamtsumme der Gangunterschiede in den beiden Büscheln dieselbe bleiben, so muß in dem vertikal geneigten Büschel der bildseitige Gangunterschied  $BE'$  größer als der im horizontalen Büschel liegende Gangunterschied  $BE$  und somit der Winkel  $ABE'$  kleiner als  $ABE$  sein. Es ist daher geometrisch ersichtlich, daß beim Übergange vom horizontalen zu dem vertikal geneigten Büschel der Strahl  $BK$  dabei nicht mehr den Kreiskegel, sondern einen in bezug auf die Horizontalebene abgeplatteten Kegel beschreibt; daher müssen auch in der Brennebene des Analysierfernrohres die Kegelschnitte, die Spektrallinien, noch mehr gegen die  $x$ -Achse geneigt erscheinen, wenn bei derselben Richtung des Analysierfernrohres gegen die Gitternormale auch das Kollimatorfernrohr so gerichtet wird, daß der gesamte Ablenkungswinkel wächst. Wird dagegen bei gegebener Richtung des Analysierfernrohres gegen die Gitternormale das Kollimatorfernrohr von der zum Gitter senkrechten Richtung aus entgegengesetzt gerichtet, so daß der gesamte Ablenkungswinkel abnimmt, so



wird der Kreiskegel zu einem in bezug auf die Horizontalebene ausgewölbten Kegel, und die Krümmung der Spektrallinien abnimmt, bis sie geradlinig werden, wenn die Achsen der beiden Fernröhre in derselben gegen das Gitter geneigten Richtung stehen. Wird das Kollimatorfernrohr noch weiter auf die andere Seite von der Richtung des Analysierfernrohres gedreht, so schlägt die Krümmung der Spektrallinien auf die andere Seite um und nimmt allmählich zu. Zur Bestimmung der Korrektur, welche an die an der Spitze der Spektrallinie gemessene Ablenkung anzubringen wäre, um sie auf die Ablenkung der Mitte der Spektrallinie zu reduzieren, erweist sich einfacher in jedem speziellen Falle die Abszisse  $x$  trigonometrisch durchzurechnen. Da im Spektrum derselben Ordnung die Gesamtsumme der Gangunterschiede im horizontalen und in dem vertikal geneigten Büschel dieselbe sein muß, so folgt

$$(4) \quad AB \sin \alpha_1 + AB \sin \alpha_2 = AB \sin \alpha_1' + AB \sin \alpha_2'.$$

Sei in dem Objektraume ebenfalls  $M_1 L_1 \parallel AB$  gezogen, so ist in dem sphärischen rechtwinkligen Dreieck  $s_1 f_1 l_1$ :

$$s_1 f_1 = \gamma, \quad f_1 l_1 = 90^\circ - \alpha_1, \quad s_1 l_1 = 90^\circ - \alpha_1'$$

und daher

$$(5) \quad \sin \alpha_1' = \cos \gamma \cdot \sin \alpha_1;$$

es läßt sich somit aus der Gl. (4) der Winkel  $\alpha_2'$  bestimmen.

In dem im Bildraume liegenden sphärischen Dreiecke  $s_2 f_2 l_2$  sei  $s_2 p_2$  die zu  $f_2 l_2$  senkrechte Höhe, welche der durch die Spitze  $S_2$  der Spektrallinie gelegten Vertikalebene  $S_2 M_2 P_2$  entspricht, und da nach dem früher Bewiesenen und nach der Bezeichnung

$$l_2 f_2 = 90^\circ - \alpha_2, \quad l_2 s_2 = 90^\circ - \alpha_2',$$

$$l_2 p_2 = 90^\circ - \beta_2, \quad s_2 p_2 = \gamma, \quad p_2 f_2 = \xi,$$

so folgt

$$(6) \quad \sin \alpha_2' = \cos \gamma \cdot \sin \beta_2$$

und

$$(7) \quad \xi = \beta_2 - \alpha_2.$$

In linearem Maße ausgedrückt ist in der Brennebene die Abszisse der Spitze  $S_2$  der Spektrallinie

$$x = F_2 P_2 f_2 \operatorname{tg} \xi$$

und die Ordinate

$$y = S_2 P_2 = f_2 \sec \xi \cdot \operatorname{tg} \gamma.$$

Beim Reflexionsgitter, wo man das Spiegelbild des Kollimatorspaltes in der Gitterebene als die Lichtquelle anzusehen hat, oder bei einer anderen Beobachtungsanordnung, ist es immer leicht, die Winkel zu bestimmen, welche den  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  entsprechen, um dann die Krümmungsabweichung zu ermitteln.

Diese Krümmung der Spektrallinien wurde von mir beobachtet und gemessen. Dazu wurde ein Spektrometer von Schmidt und Haensch verwendet, bei welchem die Brennweite des Kollimatorfernrohres  $f_1 = 236,9$  mm, die des Analysierfernrohres  $f_2 = 244,7$  mm war und dessen Kreis mit zwei Nonien versehen die Ablesungen bis auf  $10''$  ermöglichte. Als Gitter wurde ein Metallreflexionsgitter von Rutherford mit 15480 Intervallen bei 17296 pro inch verwendet. Als Lichtquelle diente das Natrium im gewöhnlichen Gasbrenner. Bei der Messung wurde das Analysierfernrohr dicht neben dem Kollimatorfernrohr gestellt. Richtete man die Gitternormale so, daß sie den kleinen Winkel zwischen Kollimator und Fernrohr halbierte, so erschien das direkte Reflexionsbild des Spaltes; drehte man dann das Gitter so, daß seine Normale durch das Kollimatorfernrohr und weiter ging, so konnte man die Natriumlinien im Spektrum der  $I_1$ ,  $II_1$  und  $III_1$  Ordnung, dagegen bei entgegengesetzter Drehung des Gitters im Spektrum der  $I_2$ ,  $II_2$ ,  $III_2$  und  $IV_2$  Ordnung beobachten. Es wurde bei der Messung in jedem Spektrum, mittels der Gitterdrehung auf den Vertikalfaden des Analysierfernrohres zuerst der in der Achse liegende Scheitel der Natriumlinie  $D_2$  eingestellt, dann aber bei unverändertem Gitter der Faden mittels Fernrohrdrehung auf die gekrümmten Spitzen derselben Linie, weiter auf den Scheitel der Linie  $D_1$  und auf ihre Spitzen verschoben, dann auch diese Einstellungen in umgekehrter Reihenfolge wiederholt, wobei jedesmal die beiden Nonien abgelesen wurden. Nachher wurde die Gitternormale in die Richtung der Achse des Analysierfernrohres gebracht, um durch die Autokollimation den Winkel  $\alpha_2$  zwischen der Gitternormale und dem Analysierfernrohr bei Beobachtung zu bestimmen, und endlich wurde mit dem Analysierfernrohr auf den Kollimatorspalt eingestellt, um den Winkel zwischen Fernrohr und Kollimator und daraus den Winkel  $\alpha_1$  zwischen der Gitternormale und dem Kollimatorfernrohr bei Beobachtung

zu ermitteln. Der vertikale Abstand der beiden Spitzen der gekrümmten Spektrallinien war jedesmal gleich dem Durchmesser der Fadendiaphragma des Analysierfernrohres und zwar  $2y = 18,9 \text{ mm}$ ; dieser Höhe der Spektrallinien entsprach die gesamte Länge des Kollimatorspaltes  $2s_1 = 18,3 \text{ mm}$ . Es wurde am Ende der Beobachtungen der Spalt horizontal gestellt und dessen Winkelgröße, die gleich  $2\gamma$  ist, unmittelbar mit dem Analysierfernrohr gemessen, was  $\gamma = 2^\circ 12' 41,25''$  ergab. Da nach der Rechnung sogar im Falle III<sub>1</sub> der stärksten Krümmung die Abweichung  $\xi$  für die  $D_1$ -Linie sich nur um  $1,5''$  größer als für die  $D_3$ -Linie ergibt, die Herausstellung solcher Größe nicht erwartet werden konnte, so werden aus den Unterschieden der Einstellungen der Mitte und der Spitzen der beiden Linien, im ganzen also aus acht Werten der Abweichung, jedesmal die Mittelwerte  $\xi_B$  gebildet und ihre mittlere Fehler  $\pm e_B$  bestimmt. Für die Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ , die für die  $D_3$ -Linie gelten, wurden auch nach den Formeln (4), (5), (6), (7) die Abweichungen  $\xi_R$  berechnet. Die folgende Tabelle gibt die Zusammenstellung der Resultate.

Sp.-Ord.	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\xi_B$	$\pm e_B$	$\xi_R$
III <sub>1</sub>	$21^\circ 46' 42,5''$	$56^\circ 18' 42,5''$	$5' 28''$	$11''$	$5' 34''$
II <sub>1</sub>	7 33 35,0	42 5 15,0	2 52	4	2 46
I <sub>1</sub>	-5 7 51,2	29 21 41,2	1 13	6	1 10
I <sub>2</sub>	29 15 15,0	-5 1 27,5	1 36	7	1 2
II <sub>2</sub>	41 57 7,5	7 39 50,0	2 21	5	2 3
III <sub>2</sub>	56 8 51,2	21 51 53,7	3 19	7	3 19
IV <sub>2</sub>	74 11 30,0	39 54 42,5	5 23	12	5 21

Die Abweichung der Einstellung des Analysierfernrohres an die Spitze von der an den Scheitel der Spektrallinie ergibt sich in diesem Falle nahe gleich dem Abstände der beiden Natriumlinien, welcher Unterschied bei höherem Spalte noch merklichere Fehler herbeiführen könnte. Da die Krümmung in jedem Spektrum mit den Ablenkungswinkeln wächst, so folgt, daß auch die Dispersion an den Spitzen der Spektrallinien eine andere als an den Scheiteln derselben ist. Solche Fehlerquelle ist besonders zu befürchten bei Ausmessungen von breit gemachten Spektrogrammen. Besonders bei den

Reflexionsgittern, die nach dem Prinzip der Autokollimation montiert sind, kommt es vor, daß man den durch ein Prisma reflektierten Spalt schief in vertikaler Richtung auf das Gitter wirft, damit das entstandene Spektrum nicht durch dasselbe Prisma teilweise verdeckt wird; es ist klar, daß in solchem Falle der ganze Spalt und die Spektrallinien nur die Spitzen des wahren Spaltes und der wahren Linien ausmachen, so daß die Abweichungen der ganzen Linien besonders stark sein können. Auch ist diese Fehlerquelle zu erwarten bei den bolometrischen Messungen im unsichtbaren Teile des Spektrums, wo man den Faden nicht sicher auf den Scheitel der gekrümmten Spektrallinie einstellen kann. Ebenfalls könnte es bei Anwendung des Gitters bei Sternspektrographen vorkommen, daß man den Stern nicht genau in der Mitte des Spaltes einstellt und dadurch ein Spektrum mit verschobenen Spektrallinien bekommt; kennt man die eingestellte Spaltstelle, so ist es möglich, nach den obigen Formeln die Korrekturen an die Ablenkungen der Linien anzubringen.

Diese Untersuchung habe ich schon im Jahre 1907 theoretisch ausgeführt und im Sommer 1908 einige Messungen mit dem Autokollimationsgitter im Physikalischen Laboratorium von Hrn. Prof. P. Weiss an der Technischen Hochschule in Zürich gemacht; indessen erst jetzt konnte ich eine zweckmäßigere Beobachtungsanordnung im Physikalischen Laboratorium von Hrn. Prof. A. R. Colley an der K. Universität in Warschau durchmachen. Es sei mir gestattet, an dieser Stelle diesen Herren Professoren für ihr freundliches Überreichen der Instrumente meinen aufrichtigen Dank auszudrücken.

Warschau, Physik. Laborat. d. K. Univ., Dezember 1910.

(Eingegangen 16. Januar 1911.)

**8. Messung von Kapazitätsänderungen  
mit schnellen Schwingungen, angewandt auf die  
Vergleichung der Dielektrizitätskonstanten  
von Gasen;  
von Hermann Rohmann.**

(Auszug aus der Straßburger Dissertation.)

Kapazitätsmessungen mit schnellen Schwingungen erreichten bis jetzt keinen sehr hohen Grad von Genauigkeit. Ein wesentlicher Fortschritt wurde darin gemacht durch die von Hrn. Dieckmann ausgeführte Dreithermoelement-Nullmethode.<sup>1)</sup>

Diese gründet sich auf das Verschwinden von  $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$  in zwei gekoppelten Kondensatorkreisen ( $i_1$  und  $i_2$  die Momentanwerte der Ströme in beiden), wenn die Produkte aus Selbstinduktion und Kapazität in den Kreisen einander gleich sind. Es wurde dabei eine Genauigkeit der Kapazitätsmessung von 0,1 Proz. erzielt.

Eine weitere Steigerung der Empfindlichkeit wurde ermöglicht durch das von den Herren Mandelstam u. Papalexi angegebene Kurzschluß-Ringdynamometer<sup>2)</sup>, welches das Verschwinden von  $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$  auf weit einfachere und genauere Weise zu bestimmen erlaubt, als das mit den drei Thermoelementen angängig war. Auf Anregung von Hrn. Dr. Mandelstam habe ich versucht, mit diesem Instrument genauere Kapazitätsmessungen vorzunehmen; die Methode findet ihre Anwendung und zugleich eine Prüfung in der Vergleichung von Dielektrizitätskonstanten von Gasen. Dieser Gegenstand schien ein gewisses Interesse zu haben, da die Zahl der vorliegenden Messungen gering ist, und schnelle Schwingungen noch nicht dabei benutzt wurden.

1) M. Dieckmann, Straßburger Diss. 1907; Ann. d. Phys. 24. p. 77. 1907.

2) L. Mandelstam u. N. Papalexi, Ann. d. Phys. 33. p. 490. 1910.

## Methode.

Wenn von zwei lose gekoppelten Kondensatorkreisen I und II (Fig. 1) der erste zu Schwingungen angeregt wird, gilt nach Dieckmann:

$$J_{12} = \int_0^{\infty} i_1 i_2 dt = \frac{w_2}{p_{12}} \cdot \frac{p_1 c_1 - p_2 c_2}{w_1 c_1 + w_2 c_2} \int_0^{\infty} i_2^2 dt,$$

wo  $i$  die Momentanwerte der Ströme,  $p$  Selbst- und gegenseitige Induktionskoeffizienten,  $c$  die Kapazitäten und  $w$  die Widerstände in beiden Kreisen sind.

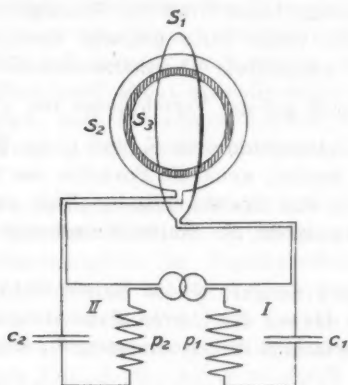


Fig. 1.

Das Verschwinden von  $\int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$  fordert:

$$p_1 c_1 = p_2 c_2,$$

d. h. die Beobachtung von  $J_{12}$  führt die Bestimmung der Gleichheit der beiden Produkte (im folgenden als „Resonanz“ bezeichnet) auf eine Nullmethode zurück.  $J_{12}$  wurde gemessen mit dem Kurzschlußbringdynamometer.<sup>1)</sup>

1) Vgl. die Theorie in der Arbeit von L. Mandelstam und N. Papalexi.

Das Instrument (Fig. 1) besteht aus zwei konzentrischen, senkrecht zueinander stehenden Spulen  $S_1$  und  $S_2$ . Drehbar um ihren gemeinsamen Durchmesser ist ein leichter Metallring  $S_3$  aufgehängt, dessen Ebene in der Ruhelage mit der von  $S_2$  zusammenfällt. Die Ablenkungen dieses Ringes werden beobachtet (vgl. p. 992).

Die Spule  $S_1$  bildet einen Teil des Kondensatorkreises I ( $p_1 c_1$ ) und  $S_2$  ist ebenso verbunden mit Kreis II ( $p_2 c_2$ ). Wird  $p_1 c_1 = p_2 c_2$  gemacht, so gibt das Instrument den Ausschlag Null. Sei nun der Kondensator  $c_2$  gefüllt mit einem Gase von der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_{\text{bei } 760 \text{ mm}}$  und ändert man den Druck von  $P$  in  $P'$ , so erhält man eine Änderung von  $c_2$  um

$$\delta c_2 = c_2 (\epsilon - 1) (P - P')$$

(streng wäre dabei für  $c_2$  die Vakuumkapazität einzusetzen, bei dem kleinen  $\epsilon - 1$  der Gase kann man statt dessen den Wert für irgend eine Gasfüllung nehmen).

Der Kreis II enthält eine Kompensationsvorrichtung, die Kapazitätsänderungen im entgegengesetzten Sinne hervorzurufen erlaubt, so daß man wieder „Resonanz“ erhält.

Die direkte Messung der D.K. erfordert nun die Bestimmung von  $\delta c_2$  aus den für die Kompensation in Betracht kommenden Größen. Dabei stößt man auf ziemliche Schwierigkeiten, ich habe mich daher darauf beschränkt, das Verhältnis von D.K. zu messen.

Für ein zweites Gas ( $\bar{\epsilon} P$  usw.) ist:

$$\overline{\delta c_2} = c_2 (\bar{\epsilon} - 1) (P - P'),$$

man hat also für die Bestimmung von  $\epsilon/\bar{\epsilon}$  nur das Verhältnis  $\delta c_2 / \overline{\delta c_2}$  zu messen und die Skala der Kompensationsvorrichtung braucht nur so kalibriert zu sein, daß man aus ihr das Verhältnis der äquivalenten Änderungen von  $c_2$  entnehmen kann.

Zur Kompensation wurden verschiedene Anordnungen benutzt. Als naheliegendste zuerst die Parallelschaltung einer kleinen variablen Kapazität zu  $c_2$ . (Diese kleine Kapazität war gewonnen durch Hintereinanderschalten eines variablen mit einem kleinen konstanten Kondensator, beide waren gemessen, die Gesamtkapazität wurde berechnet.) Es zeigte sich aber, daß die Bestimmung von  $\delta c_2$  zu falschen Werten führte; die

Gründe dafür sind wohl in den unten (p. 992) angegebenen Fehlerquellen zu suchen.

Erwähnt sei noch folgende Methode:

Kreis II enthält außer  $c_2$  eine sehr große Kapazität in Reihe, zu der eine variable parallel geschaltet ist. Diese Anordnung scheiterte daran, daß eine Kapazität von der geforderten Größe (ca.  $\frac{1}{3}$  Mikrofarad) nur als Kondensator mit festem Dielektrikum (Glimmer, Papier) zu beschaffen war, dieses aber für den vorliegenden Zweck sich nicht bewährte.

Als bequemste Kompensation wurde schließlich die in Fig. 2 dargestellte beibehalten. Eine variable Kapazität  $c_3$  ist parallel geschaltet zu einer kleinen Selbstinduktion  $p_3$  von Kreis II.

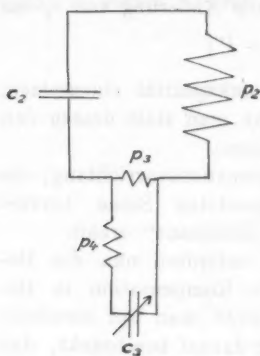


Fig. 2.

Die Anordnung stellt ein aus zwei galvanisch und induktiv gekoppelten Kreisen bestehendes System dar, dem eigentlich zwei Eigenschwingungen zukommen. Die Periode der einen wird nahe übereinstimmen mit der des ursprünglichen Kreises II, die der anderen wird dagegen nahezu diejenige von Kreis  $c_3 p_4 p_3$  und daher sehr klein sein. Man kann also die Sache auch so ansehen, alsob man nur einen

Kreis mit einer Eigenschwingung hätte, dessen Periode durch Veränderung von  $c_3$  sehr fein verändert werden kann.

Näheren Einblick in die quantitativen Beziehungen erhält man durch Untersuchung der Eigenschwingungen.

Dieselbe<sup>1)</sup> ergibt, daß solche Wertsysteme von  $c_3$  und  $c_2$  „Resonanz“ herbeiführen mit einem Kreise von der Schwingungsdauer  $2\pi\tau$ , die der Relation genügen:

$$c_2 = \frac{\tau^2}{p_2 + p_3} - c_3 \frac{p_3^2}{(p_2 + p_3)^2} - \frac{c_3^2}{c_2} \frac{(p_3 + p_4)p_3^2}{(p_2 + p_3)^3}$$

( $c_2$  rechts kann nach der früheren Bemerkung konstant  $= c_0$ , Vakuumkapazität, gesetzt werden.)

1) Vgl. Diss.



Ist  $c_2'$ ,  $c_3'$  ein anderes Paar zusammengehöriger Werte, so gilt nach obiger Gleichung auch

$$c_2 - c_2' = \delta c_2 = - (c_3 - c_3') \frac{p_3^2}{(p_2 + p_3)^2} - \frac{c_3^2 - c_3'^2}{c_0} \frac{(p_3 + p_4) p_3^2}{(p_2 + p_3)^3},$$

in welcher Form die Beziehung dazu dienen könnte, aus  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_3'$ ,  $p_3$ ,  $p_4$  und  $p_2$ , das  $\delta c_2$  zu berechnen.

Über die Größenverhältnisse sei erwähnt, daß bei meiner Anordnung war (genähert)

$$\frac{\delta c_2}{c_2 - c_2'} = - \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^2 = \text{ca. } 0,001,$$

also

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{1}{30};$$

da  $p_2 = 5000$  cm gemessen war, so ergibt sich

$$p_3 = 170 \text{ cm.}$$

Der direkten Bestimmung von  $\delta c_2$  steht also die Schwierigkeit, die kleine Selbstinduktion  $p_3$  mit genügender Genauigkeit zu messen, im Wege. Vielleicht bietet sich hier eher umgekehrt eine Methode, kleine Selbstinduktionskoeffizienten zu messen, oder zu vergleichen.

Ich habe die direkte Messung von  $\delta c_2$  nicht versucht. Aus der Eichung ergibt sich aber eine teilweise Prüfung der abgeleiteten Beziehung, die wenigstens keine Widersprüche gegen die Beobachtung zeigt.

Für die Vergleichung von D.K. ist die Kenntnis der Relation zwischen  $c_2$  und  $c_3$  nicht nötig. Die Kompensationskapazität wird geeicht. Um unabhängig zu sein von der Gültigkeit des Gesetzes  $\varepsilon - 1/d = \text{const.}$  geschah das in folgender Weise.

Es ist klar, daß man durch kleine Änderungen an den Konstanten des Kreises I und damit an der Schwingungsdauer des ganzen Aufbaues erreichen kann, daß ein bestimmter Wert von  $c_2$  mit jedem beliebigen  $c_3$  zusammen „Resonanz“ ergibt. Es wird dann allerdings die Beziehung zwischen  $c_2$  und  $c_3$  geändert; nur unmerklich ändert sich aber die einem Intervalle  $c_3$  bis  $c_3'$  entsprechende Kapazitätsdifferenz  $\delta c_2$ .

Danach ist folgende Eichung möglich. Man verschafft sich eine feste Änderung, die man nach Belieben zu  $c_2$  hinzufügen und wieder fortnehmen kann; und zwar dadurch, daß man den mit irgend einem Gase gefüllten Gaskondensator nur

bei zwei bestimmten Drucken  $P$  und  $P'$  benutzt. Nach dem obigen sind nun überall auf der Kompensationskapazität Intervalle zu bestimmen, die derselben Änderung von  $c_3$  entsprechen.

Das Resultat der Kalibrierung wurde in Form einer Tabelle dargestellt, die zu jedem Wert  $c_3$  einen Wert  $P_H$  gab. Das wurde erreicht, indem man  $P_H = 0$  einen beliebigen Wert  $c_3$  zuordnete, dann  $P_H = P - P'$  den aus der Eichung folgenden Wert  $c_3'$  usw. Die Beziehung zwischen  $P_H$  und  $c_3$  ließ sich mit ziemlicher Näherung darstellen durch

$$P_H = \text{const.} + A c_3 + B c_3^2.$$

Für irgend eine gemessene Änderung von  $c_3$  in  $c_3'$  hat man in dem der Tabelle entnommenen  $-(P_H - P_H')$  eine der Änderung von  $c_3$  äquivalente Größe, so daß also, wenn für die Drucke  $P$  und  $P'$  eines beliebigen Gases gemessen wurde  $c_3$  und  $c_3'$ , gilt  $\varepsilon - 1 \sim - \frac{P_H - P_H'}{P - P'}$ .

#### Ausführung.

Für die praktische Ausführung der Methode sei zuerst erwähnt die Art der Erregung von Kreis I. Es erscheint als untunlich, diesem Kreise eine Funkenstrecke einzuverleiben, daher wurde Stoßerregung gewählt. Entsprechend festgekoppelt mit I wird ein abgestimmter Kreis mit verhältnismäßig großer Kapazität (Stoßkreis), der die Stoßfunkenstrecke enthält (Fig. 3). Die Vorteile dieser Erregung bestehen darin, daß man I eine beträchtliche Energie zuführen kann, ohne dabei zwei Schwingungen zu erzeugen, und dann vor allem darin, daß die Stoßfunkenstrecke viel gleichmäßiger arbeitet als die gewöhnliche.

Der Betrieb erfolgte mit Hilfe eines Induktors, der als Wechselstromtransformator benutzt wurde.

Wir haben im ganzen drei Kondensatorkreise, deren Aufstellung und Konstruktion wir nun beschreiben. Zu achten war vor allem auf genügende Stabilität und Schutz vor Temperaturschwankungen. Die letztere Forderung, die einen möglichst kompensiösen Aufbau verlangt, widerspricht in etwas der Notwendigkeit, schädliche Induktionen fernzuhalten.

Nach mehreren Versuchen wurde folgende Anordnung beibehalten, die sich auch ziemlich bewährte. In einem soliden Holzkasten ( $60 \times 30 \times 30$  cm) wurden untergebracht das Kurz-

schlußdynamometer, der Kondensator  $c_1$ , die Spulen  $p_1$  und  $p_2$  und die variable Koppelung besitzen I und II. Alle verstellbaren Teile waren durch verschließbare Öffnungen leicht zugänglich gemacht; das Dynamometer wurde durch eine Glasplatte in der vorderen Wand mit Fernrohr und Skala (in einer Entfernung von 1,50 m) abgelesen.

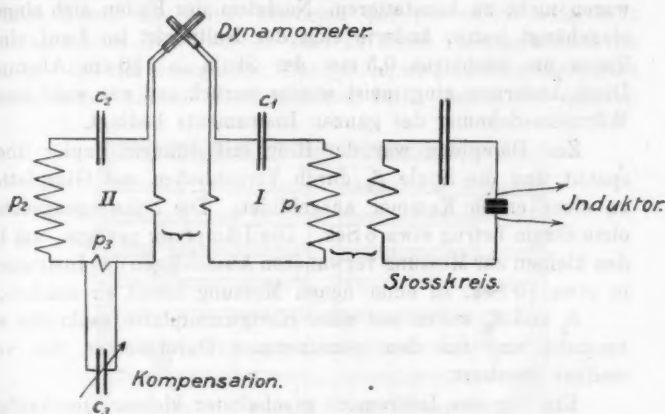


Fig. 3.

Außerhalb des Kastens standen rechts und links in besonderen Schutzgehäusen Gas- und Kompensationskapazität, nach rückwärts Funkenstrecke und Kondensatoren des Stoßkreises.

Der Aufbau war im Kellergeschoß des Instituts erschütterungsfrei aufgestellt, alle Teile waren nach Möglichkeit in Watte verpackt. Die Temperatur änderte sich in dem nach Norden gelegenen Zimmer (bei fortwährend brennender elektrischer Beleuchtung) um weniger als  $\frac{1}{2}^{\circ}\text{C}$ . pro Tag, während einer Beobachtungszeit von etwa 1 Stunde nicht um  $\frac{1}{10}^{\circ}$ .

#### Kurzschluß-Ringdynamometer.

Das Kurzschluß-Ringdynamometer war ohne wesentliche Änderung nach dem Muster des von den Herren Mandelstam-Papalexii benutzten Instruments ausgeführt. Die Spule  $s_1$  bestand aus 2 Windungen von etwa 8 cm Durchmesser durch Paraffinumgießung versteiften Litzendrahtes von  $2\text{ mm}^2$  Quer-

schnitt,  $S_2$  aus 12 Windungen von 7 cm Durchmesser. Der Ring  $S_3$  aus  $\frac{1}{2}$  mm dickem Aluminiumblech hatte 6 cm Durchmesser und eine Breite von ca.  $\frac{3}{4}$  mm. Ein kleiner Spiegel war durch einen Glasfaden an ihm befestigt. Die Aufhängung bildete ein 6 mm langer Quarzfaden. Dieselbe bewährte sich vorzüglich, Änderungen der Ruhelage nach großen Ausschlägen waren nicht zu konstatieren. Nachdem der Faden sich einmal eingehängt hatte, änderte sich der Nullpunkt im Lauf eines Tages um höchstens 0,5 mm der Skala in 150 cm Abstand. Diese Änderung ging meist wieder zurück und war wohl durch Wärmeausdehnung des ganzen Instruments bedingt.

Zur Dämpfung war der Ring mit dünnem Papier überspannt und die Spule  $S_2$  durch Verschließen mit Glasplatten zu einer engen Kammer ausgebildet. Die Schwingungsdauer ohne Strom betrug etwa 6 Sek. Die Dämpfung genügte, um bei den kleinen zur Messung verwandten Ausschlägen das Instrument in etwa 10 Sek. zu einer neuen Messung bereit zu machen.

$S_1$  und  $S_2$  waren auf einer Hartgummiplatte senkrecht zueinander und um den gemeinsamen Durchmesser fein verstellbar montiert.

Ein vor das Instrument geschalteter kleiner Quecksilberkommutator gestattete die zur Justierung (s. u.) nötigen Änderungen der Ströme in den Spulen leicht vorzunehmen.

#### Kondensatoren.

Der Gaskondensator muß ein Evakuieren vertragen, ohne dadurch mechanisch beeinflusst zu werden. Er soll bei geringem Rauminhalt eine möglichst große Kapazität haben. Ferner soll die durch festes Dielektrikum zu bewirkende Isolation seiner beiden Belegungen nicht merklich von Kraftlinien durchsetzt werden. (Das ist erwünscht einmal für etwaige absolute Bestimmungen der Dielektrizitätskonstanten, dann aber auch wegen der für die ganze Messung ungünstigen Eigenschaften des festen Dielektrikums). Seine Wärmekapazität muß so groß sein, daß er die beim Variieren des Gasdrucks entstehenden Wärmemengen ohne schädliche Temperaturerhöhung aufnehmen vermag.

Danach wurde man zu der folgenden Konstruktion geführt (Fig. 4): Der Kondensator ist aus 9 kreisförmigen vernickelten

Messingplatten von 8,5 cm Durchmesser und 0,5 cm Dicke aufgebaut. Die beiden untersten Platten sind voneinander getrennt durch drei Glasstückchen von etwa 0,2 cm Dicke und 0,2 qcm Querschnitt. In die dritte Platte sind drei Metallfüßchen eingeschraubt, die durch entsprechende Bohrungen der zweiten gehen und sich auf die erste aufstellen; ebenso ist die vierte Platte durch die dritte hindurch auf die zweite aufgestellt und so weiter. Die Füßchen sind auf einen Plattenabstand von ca. 0,1—0,2 mm einreguliert. Das System wird zusammengehalten durch einen zentral durchgehenden Stift, der in der unteren

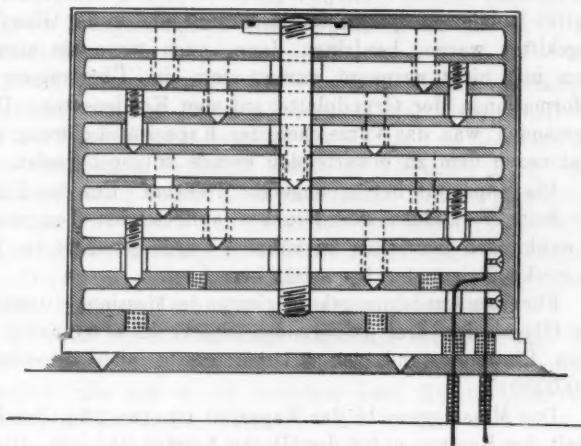


Fig. 4. Gaskondensator.

Platte befestigt ist, und an dessen oberem Ende eine Schraubenmutter erlaubt, auf die oberste Platte zu drücken und damit das Ganze zusammenzupressen.

Der so gebildete Zylinder ruht auf drei Glasstückchen von 3 mm Höhe auf einer Metallplatte, durch die von unten her die Zuleitungen hindurchgehen, dieselben sind in der Platte mit Schellack eingekittet. Erst diese Metallplatte setzte sich mit 3 Füßen auf eine Glasplatte, welche der die Kapazität umgebenden Glasglocke als unterer Abschluß dient, und durch die die Zuleitungen weitergehen. Auf der Metallplatte auf-

gesetzt ist eine den Kondensator in etwa 1 mm Abstand umgebende Hülle aus vernickeltem Messingblech. Der unter der Glasglocke noch freibleibende Raum ist durch Paraffinstücke ausgefüllt, die aber nirgends die Blechhülle berühren.

Diese Einrichtung war nötig, um den bei der Änderung des Gasdrucks auftretenden Deformationen der Grundplatte und der Glocke allen Einfluß auf die Kapazität zu nehmen. Ehe die Schutzmaßregeln getroffen waren, wurde als besonders fehlerhaft gefunden ein direktes Aufsetzen (unter Zwischenschalten von drei Glasstückchen) des Kondensators auf die untere Glasplatte. Die Zuleitungsdrähte, die in der ersten und zweiten Kondensatorplatte festgeschraubt und in der Glasplatte eingekittet waren, bewirkten dann, auch wenn sie ziemlich dünn und nicht gespannt waren, stets eine Übertragung der Deformationen der Grundplatte auf den Kondensator. Unter Umständen war das Vorzeichen der Kapazitätsänderung beim Evakuieren dem zu erwartenden gerade entgegengesetzt.

Die Kapazität betrug ungefähr 1000 cm. Um den Einfluß der beim Verändern des Druckes auftretenden Temperaturschwankungen beurteilen zu können, wurde genähert der Temperaturkoeffizient der Kapazität berechnet.

Für einen Ausdehnungskoeffizienten des Messings  $= 0,000018$ , des Glases der drei isolierenden Stückchen  $= 0,000008$  und einen Plattenabstand von 0,1 mm ergibt sich derselbe zu  $- 0,000047$ .

Das Messinggewicht der Kapazität ist etwa 2 kg, der Luftinhalt des Raumes unter der Glocke beträgt 250 ccm. Die bei der Dilatation auf 10faches Volum auftretende Temperaturerniedrigung beträgt demnach etwa  $0,08^{\circ}\text{C}$ ., was einer Kapazitätsänderung von 0,000006 entspricht.

Dabei ist aber zu beachten, daß nur der kleinste Teil der Luftmenge zwischen den Kondensatorplatten sitzt und daß der Wasserwert der Paraffin- und Glasmassen nicht in Rechnung gezogen ist. Wir können also den Einfluß der Erwärmung als nicht in die Fehlergrenzen fallend beiseite lassen.

Bei der Zusammensetzung des Kondensators wurden die Platten sorgfältig in Alkohol und Äther gewaschen, dann auf über  $100^{\circ}\text{C}$ . erhitzt, noch heiß zusammengesetzt und sofort unter die Glocke gebracht. Der Widerstand betrug mehr als  $10^6$  Ohm.

Bei der bloßen Vergleichung der Dielektrizitätskonstanten würde auch eine viel schlechtere Isolation nicht störend wirken, falls sie nur konstant bliebe. Doch sind sogar größere Änderungen des Isolationswiderstandes ganz unschädlich.

Nach Mizuno<sup>1)</sup> ist in einem Kondensatorkreise, in dem der Kapazität  $C$  ein Widerstand  $s$  parallel geschaltet, und der übrige Ohmsche Widerstand  $r$  ist, zu setzen als resultierende Kapazität

$$C' = C \frac{s}{r+s} = C \left(1 - \frac{r}{s}\right).$$

$r = 1 \Omega$ , gibt  $r/s = 10^{-5}$ . Das Verhältnis könnte sich bei der gegebenen Meßgenauigkeit also vergrößern bis auf  $10^{-5}$ , ehe ein Einfluß auf die Kapazität merkbar würde.

Als Kondensatoren für Kreis I und für die Kompensationsvorrichtung wurden Drehkondensatoren der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie verwandt. Diese ließen an Konstanz und gutem elektrischen Verhalten nichts zu wünschen übrig. Für die Kompensation kommt noch in Betracht, daß die Kapazitätsänderungen bei diesen Kondensatoren fast für die ganze Skala mit genügender Genauigkeit den Drehungswinkeln proportional sind. Die Skala geht von  $0^\circ$ — $180^\circ$  und entspricht Kapazitäten von 120—2200 cm.

$c_1$  würde benutzt bei einer Kapazität von 1000 cm. Zur feineren Einstellung war eine kleinere Kapazität parallelgeschaltet, die aus einem zwischen zwei Metallplatten verschiebbaren Glasstreifen bestand.

Die Kondensatoren des Stoßkreises waren drei parallelgeschaltete Leydener Flaschen von je ca. 2700 cm für die Messungsreihe  $A$ ; bis auf eine wurden sie für  $B$  durch Ölkondensatoren ersetzt. Am geeignetsten wären auch hier Luftkondensatoren gewesen, doch waren sie bei der immerhin beträchtlichen Kapazität nicht zu beschaffen. Die unten zu berichtende Veränderlichkeit der Schwingungsdauer des Aufbaus ist wohl zum großen Teil durch die hier verwandten schlechten Kondensatoren bewirkt, die sich beim Betriebe erwärmten; wenigstens wurde diese Veränderlichkeit nach Einfügung der Ölkondensatoren kleiner.

1) T. Mizuno, Ann. d. Phys. 4. p. 811. 1901.



## Stoßfunkenstrecke.

Die Funkenstrecke besteht aus zwei Messingscheiben von 9 cm Durchmesser und 0,5 cm Dicke, deren Innenseiten eben abgeschliffen und mit je einer kreisförmigen Rille versehen sind. Die beiden Scheiben sind voneinander getrennt durch einen Ring aus Glimmer von ca.  $\frac{1}{10}$  mm Dicke, der nach innen in den durch die Rillen geschaffenen Raum vorragt. Sie können durch zwei übergeschraubte Bügel zusammengepreßt werden, und durch je zwei Schrauben in den Bügeln kann der Druck reguliert werden.

Es ist einiges zu sagen über die Zusammensetzung der Funkenstrecken, da von ihrem tadellosen Funktionieren das Gelingen der Messungen zum großen Teil abhängt. Die beiden Scheiben wurden mit Schmirgel und Öl auf einer Glasplatte eben geschliffen und auf einem Tuche mit Polierrot poliert. Dann wurden die Flächen sorgfältig mit einem mit Äther befeuchteten Tuche abgerieben, so lange, bis das Tuch auch bei längerem Reiben nicht mehr geschwärzt wurde. (Diese Operation war ganz besonders wichtig, Unreinlichkeiten an den Platten bewirken stets ein baldiges Einfressen des Funkens und schlechtes Funktionieren.) Die Platten wurden dann über dem Bunsenbrenner auf etwa 200° erhitzt, ohne daß die polierten Flächen mit der Flamme in Berührung kamen und noch heiß unter Zwischenlegen des Glimmerblatts zusammengesetzt. Der Rand wurde mit Paraffin verstrichen und so alles luftdicht verschlossen. Dann wurden die Bügel übergeschraubt, und der Druck so lange reguliert, bis beim Betrieb der Funkenstrecke ein gleichmäßiges Summen ertönte. Wie groß dabei der Abstand der Platten war an der Stelle, an der der Funke überging, wurde nicht ermittelt; jedenfalls aber war er ziemlich kleiner als 0,1 mm (Dicke des Glimmerblatts). Funkenstrecken, die nicht zusammengepreßt waren, ergaben auch nicht das erwähnte Summen, sondern ein Rasseln, und arbeiteten nicht gleichmäßig. Der Primärstrom des Induktors mußte geeignet gewählt werden. Am günstigsten wurde eine Stromstärke gefunden, die etwas größer war als die eben zum Betriebe hinreichende. (1,5 Amp. in unserm Falle.)

Tritt ein Versagen der Funkenstrecke ein, so gelingt es



wohl, sie durch Erschüttern wieder in Gang zu bringen, doch wird am besten die Zusammensetzung von neuem wiederholt. Übrigens erreicht eine einmal in Gang gesetzte Funkenstrecke eine ziemliche Lebensdauer. Bei der allerdings sparsamen (durch die Art der Beobachtung gebotenen) Benutzung sind die Messungen  $A$  während eines Monats gemacht, ohne daß der Funke versagte. Im allgemeinen war nach ca. 3 Wochen ein Auseinandernehmen nötig, da der Funke sich dann einfraß und die Einstellung des Instruments unruhig wurde. Die gebrauchten Platten zeigten sich auf einer Fläche von etwa  $2\text{ cm}^2$  mit einer feinkörnigen Oxydschicht bedeckt.

#### Selbstinduktionen und Koppelung.

Die Spulen  $p_1$  und  $p_2$  sind Ringsolenoidspulen von ca. 5000 cm, der größeren Festigkeit wegen in Paraffin eingebettet und in der hinteren Abteilung des Holzkastens übereinander befestigt. Zwischen ihnen ist die variable Koppelung von I und II angebracht, aus 2 Schleifen von 8 cm Durchmesser bestehend, von denen die eine gegen die andere auf einem Schlitten verschiebbar ist. Das untere Ringsolenoid, die Selbstinduktion von I, ist von 7 Windungen eines nach außen führenden Drahtes, der Selbstinduktion des Stoßkreises, umgeben und so eng mit dieser gekoppelt. Im übrigen waren alle zusammengehörigen Leitungen möglichst nahe aneinander geführt und an den Wänden des Kastens gut befestigt, die Verbindungen, wo es anging, verlötet.

#### Kompensationsvorrichtung.

Diese war einfach dadurch hergestellt, daß der Drehkondensator  $c_3$  in II eingeschaltet und durch eine Spule (2 Windungen von 7 cm Durchmesser) kurz geschlossen wurde. Diese Selbstinduktion war so gewählt, daß einer Drehung um  $1^\circ$  (= Kapazitätsänderung von ca. 10 cm) eine Veränderung der in II wirksamen Kapazität von ca. 0,00001 entsprach.

Die Aufstellung des Kompensationskondensators relativ zu dem die Kreise enthaltenden Kasten war wichtig. Er war zuerst (Messung  $A$ ) ziemlich nahe an  $c_1$  gebracht, in etwa 20 cm Abstand, weil man so Temperaturschwankungen besser verhüten konnte. Die Folge war, daß bei der Drehung seines

Plattensystems die Kapazität  $c_2$  mit beeinflußt wurde und die Eichkurve nicht die theoretisch geforderte Gestalt annahm. Letzteres geschah dagegen mit großer Annäherung, als für die Messungen  $B$  die Entfernung auf etwa 1 m vergrößert wurde.

Derselbe Fehler mag das Mißlingen der Bestimmung von  $\delta c_2$  mit Hilfe der ersten Kompensationsmethode (parallelgeschaltete variable Kapazität) verursacht haben. Nur ist die Ursache dort nicht so leicht zu beseitigen, da bei größerer Entfernung des Kompensations- von dem Gaskondensator die Kapazität der Verbindungsdrähte nicht mehr zu vernachlässigen ist und die Bestimmung der Gesamtkapazität des Parallelzweiges dann schwieriger wird. Vielleicht würden andere Formen von variablen Kondensatoren sich besser eignen.

#### Justierung, Abstimmung und Gang der Messung.

Nach einer ungefähren Abstimmung der drei Kreise, die durch das variable  $c_1$  und für den Stoßkreis einfach durch Verbiegen der Zuleitungsdrähte geschah, mußte zuerst das Kurzschluß-Ringdynamometer selbst justiert werden. Es soll keinen Ausschlag geben, wenn entweder nur Kreis I odernur II angeschlossen ist. Das wird erreicht durch kleine Drehungen der Spulen mit Hilfe der erwähnten Feinverstellungen.

Die Einstellung war für  $S_1$  einfach zu bewirken, der bleibende Ausschlag war kleiner 0,1 Skalenteil.

Fließt der Strom nur durch  $S_2$ , so befindet sich der Ring nahezu im labilen Gleichgewicht, da die Direktionskraft seiner Aufhängung klein ist gegen die elektromagnetischen Kräfte, denen gegenüber er eben bei der zu  $S_2$  parallelen Lage labil wird.

Eine kleine Entfernung aus dieser letzteren Stellung hat also zur Folge, daß er dann vollständig umschlägt. Ehe der Strom eingeschaltet wird, muß also der Ring vollständig zur Ruhe gekommen sein. Auch hier ist natürlich die Justierung sehr genau zu bewirken.

Nun wird mit Hilfe des Instruments  $c_1$  genauer eingestellt unter Benutzung der kleinen Zusatzkapazität; die letzte Abgleichung erfolgt mit Hilfe der Kompensationsvorrichtung selbst.

Es gibt dann also das Instrument den Ausschlag Null. Nun gilt aber, was oben über das labile Gleichgewicht des Rings gesagt war, auch noch wenn  $S_1$  Strom führt, wenigstens

wenn dieser Strom um  $90^\circ$  phasenverschoben ist gegen den Strom in  $S_2$ . Denn es bleibt bei entsprechender Koppelung die Wirkung von  $S_2$  immer vorherrschend über die sonstigen Richtkräfte. Das hat wieder zur Folge, daß, wenn beim Einschalten des Stroms ein über eine gewisse kritische Entfernung hinausgehender Ausschlag vorhanden ist, dieser sich einfach vergrößert und zum Umschlagen des Rings führt.

Durch Variieren der Koppelung ist es leicht, die Stromstärke so zu wählen, daß die kritische Entfernung einen in gewissen Grenzen beliebigen Wert erhält. Es wurde vorteilhaft gefunden, dieselbe auf ca. 5 Skt. zu bemessen. Eine weitere Verkleinerung steigert zwar die Empfindlichkeit, setzt aber große Anforderungen an Konstanz und schnelle Einstellung der Ruhelage. Allzu groß darf sie auch nicht gemacht werden, da die Empfindlichkeit schnell nachläßt. Der einer Verstimmung von  $c_2$  um 0,00001 entsprechende dauernde Ausschlag betrug 2 Skt.

Für genaue Messungen darf aber ein dauernder Ausschlag überhaupt nicht hergestellt werden. Bei Stromdurchgang erwärmen sich die Kreise und es ist dann eine fortwährende Änderung der zur Abstimmung erforderlichen Kompensationskapazität nötig. Am Instrument zeigt sich das in der Weise, daß der Ausschlag bei längerem Schließen zu wandern anfängt.

Daß das eine Folge der Erwärmung ist, konnte durch plötzliches Abkühlen des Zimmers festgestellt werden. Die im Aufbau langsam fortschreitende Abkühlung überwog dann die Erwärmung und führte zu Verschiebungen der Kompensation im entgegengesetzten Sinn.

Wie oben bemerkt, scheint dabei die Kapazität des Stoßkreises eine große Rolle zu spielen. Eine willkürlich hervorbrachte Verkleinerung dieser Kapazität um 0,001 bedingte eine Veränderung der Kapazität im Kreis II um 0,00001.

Um die Verschiebung möglichst klein zu machen, wurde der Strom nur sekundenweise durch einen Telegraphentaster geschlossen. Die Richtung des Ausschlags und die Geschwindigkeit, mit der er entsteht, genügt zur weiteren Kompensierung, es kann so mit Leichtigkeit auf Bruchteile von Hunderttausendsteln von  $c_2$  eingestellt werden.

Um die aus den Verschiebungen entstehenden Fehler zu eliminieren, wurde bei der Bestimmung der zu einer Druck-

differenz  $P - P'$  eines Gases gehörigen Kapazitätsdifferenz in der Weise verfahren:

Zu  $P$  wurde gemessen  $c_3$ , dann zu  $P'$   $c_3'$  und schließlich wieder zu  $P$   $\bar{c}_3$ .

$\bar{c}_3 - c_3$  entsprach im allgemeinen (für die Versuchsdauer von ca. 5 Min.) 2 bis  $3 \cdot 10^{-5} c_3$  bei  $A$ ; 1 bis  $2 \cdot 10^{-5} c_3$  bei  $B$ . Die Beobachtungen geschahen natürlich fortlaufend, indem immer von demselben Drucke  $P$  ausgegangen wurde, und in einem gewissen Rhythmus. Zu jeder Bestimmung wurde der Strom ungefähr dieselbe Zeit geschlossen. Die Differenz  $\bar{c}_3 - c_3$  wurde dann für längere Messungsreihen ungefähr konstant. Man kann also dem Drucke  $P$  das Mittel aus den beiden Werten zuschreiben und  $P - P'$  entsprechen lassen

$$\frac{c_3 + \bar{c}_3}{2} = c_3'.$$

#### Druckänderung und Einfüllen der Gase.

Zu diesem Zweck wurde eine Geisslerpumpe<sup>1)</sup> eingerichtet. Dieselbe erlaubte das Einfüllen sowohl direkt entwickelter Gase, als auch solcher, die erst im Wassergasometer aufgefangen waren. Nach dem Umstellen der Hähne erfolgte die Druckänderung durch Heben und Senken des Quecksilbers. Der Druck wurde an einem Quecksilbermanometer abgelesen, eine Genauigkeit von 1 mm genügte.

Beim Einbringen eines neuen Gases wurde der Kondensator bis auf 1 mm evakuiert (mit der Geisslerpumpe selbst, oder mit einer Pfeifferschen Ölpumpe) und mehrmals gespült.

#### Herstellung der Gase.

Luft wurde durch NaOH geleitet und dann durch konzentrierte Schwefelsäure in zwei Spiralwaschflaschen getrocknet.

Dieselbe Art der Trocknung wurde auch für die übrigen Gase benützt. Um Spuren von Feuchtigkeit zurückzuhalten, war zwischen Geisslerpumpe und Gaskondensator noch ein Rohr

1) Die Pumpe war natürlich vom übrigen Aufbau so weit entfernt, daß die Bewegung der Quecksilbermassen keinen Einfluß auf die Kreise ausübte.

mit  $P_2O_5$  eingeschaltet. Das Anhydrid blieb darin bei langem Gebrauch pulverförmig.

$CO_2$  entwickelt im Kippschen Apparat aus Marmor und  $HCl$ , gewaschen durch  $NaHCO_3$ .

$H$  aus  $Zn$  und  $H_2SO_4$ , gewaschen durch  $KMnO_4$  und  $AgNO_3$ .

$N$  aus  $NaNO_2$  und  $NH_4Cl$  durch Erhitzen hergestellt, durch  $FeSO_4$ -Lösung gewaschen und erst im Wassergasometer aufgefangen (Verunreinigung mit Luft schadet wegen der nahe gleichen D.K. nicht).

$N_2O$  aus  $NaNO_2$  und salzsaurem Hydroxylamin s. Treadwell, Analyt. Chemie II, p. 596.

$O$  aus  $H_2O_2$  und  $KMnO_4$ .

#### Messungen.

Es wurden zwei Messungsreihen aufgestellt. Dieselben sind mit  $A$  und  $B$  bezeichnet. Sie unterscheiden sich voneinander dadurch, daß die Anordnung bzw. die Konstanten der Kreise etwas verändert sind (damit auch die Eichkurven).

Für Messung  $A$  war  $c_3 = \text{ca. } 1000 \text{ cm}$ , die Periode der Schwingungen  $\text{ca. } 5 \cdot 10^{-7} \text{ Sek}$ . Die Kompensationskapazität  $c_3$  stand nahe am übrigen Aufbau.

Die Eichkurve ist aus den unten mitgeteilten Wasserstoffmessungen ermittelt.

Es wurde zuerst nach der Methode der kleinsten Quadrate  $P_H = \text{const.} + A c_3 + B c_3^2$  berechnet nach der Bemerkung p. 984.

Die gefundene Kurve zeigte noch systematische Abweichungen von den Beobachtungen, die aber 20 mm Druck nicht überstiegen. Sie wurde graphisch verbessert und dann eine Tabelle aufgestellt, aus der für jedes bei anderen Gasen zu  $P - P'$  gemessene Intervall  $c_3 - c_3'$  die entsprechende Differenz  $P_H - P_H'$  entnommen wurde.

Die Prüfung des Gesetzes  $\epsilon - 1/d = \text{const.}$  erfolgt durch Bildung von  $\frac{P_H - P_H'}{P - P'}$ . Der Quotient ist proportional  $\epsilon - 1$  und muß für verschiedene  $P - P'$  konstant sein, was innerhalb der Meßgenauigkeit erfüllt ist.

Wir führen hier einige vollständige Protokolle aus der Messung  $A$  an.

Die erste Spalte gibt die Drucke (in mm Hg), die zweite die zugehörigen Kapazitäten  $c_3$  (in Graden der Skala). In (1) kehrt nach p. 994 ein und derselbe Druck stets wieder, (3) gibt das Mittel aus je zwei solchen Drucken, (4) das Mittel aus den zugehörigen Werten  $c_3$ . In (5) und (6) sind dann zu den beiden Kapazitätswerten der Zeile die äquivalenten Drucke  $P_H$  und  $P_H'$  der Tabelle entnommen. (7) gibt

$$-\frac{P_H - P_H'}{P - P'} \sim \varepsilon - 1.$$

CO<sub>2</sub>. 16,9° C.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$P$	$c_3$	$P'$	$c_3'$	$P_H$	$P_H'$	$-\frac{P_H - P_H'}{P - P'}$
775	39,4					
404	95,0	775	39,4	1992	729	3,408
775	39,4					
540	76,0	775	39,5	1541	732	3,410
775	39,5					
201	122,3	775	39,6	2686	734	3,408
775	39,6					
775	41,9 <sup>1)</sup>					
286	113,1	775	42,1	2446	784	3,402
775	42,2					
775	77,2 <sup>1)</sup>					
201	150,9	775	77,2	3519	1570	3,490
775	77,2					
444	123,1	775	77,3	2708	1573	3,430
775	77,4					
603	102,4	775	78,0	2716	1585	3,435
775	78,5					

$$\text{Mittel} - \frac{P_H - P_H'}{P - P'} \quad 3,418$$

1) Die zu dem Drucke 775 gehörige  $c_3$  ist willkürlich verstellt worden durch Änderung der Schwingungsdauer.

H. 17° C. (Zur Berechnung der Eich-tabelle benutzt.)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$P$	$c_s$	$P'$	$c_s'$	$P_H$	$P_H'$	$-\frac{P_H - P_H'}{P - P'}$
801	41,1					
128	72,0	801	41,6	1449	776	1,000
801	42,0					
242	68,1	801	42,5	1357	795	1,005
801	43,0					
324	65,1	801	43,4	1287	813	0,995
801	43,7					
801	66,3					
242	91,0	801	67,1	1896	1333	1,006
801	67,9					
242	91,8	801	68,1	1914	1357	0,997
801	68,3					
324	88,8	801	68,6	1843	1369	0,995
801	68,9					
801	92,3					
242	115,0	801	92,9	2494	1941	0,989
801	93,5					
242	116,1	801	93,9	2523	1964	1,000
801	94,2					
468	108,1	801	94,6	2818	1982	1,009
801	95,0					
801	114,7					
242	136,1	801	115,3	3070	2502	1,015
801	115,9					
242	137,1	801	116,6	3100	2536	1,009
801	117,2					
454	130,1	801	117,6	2897	2562	0,967
801	117,9					
801	132,8					
242	151,7	801	133,4	3544	2991	0,991
801	133,9					
242	151	801	134,1	3565	3011	0,992
801	134,2					
425	147,2	801	134,5	3404	3023	1,014
801	134,8					

Mittel 0,999

N. 16,7° C.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
$P$	$c_s$	$P'$	$c_s'$	$P_H$	$P'_H$	$-\frac{P_H - P'_H}{P - P'}$
760	61,6					
129	117,7	761	63,0	2574	1238	2,115
762	64,4					
208	112,7	764	64,8	2495	1280	2,065
765	65,1					
498	60,2	764	66,1	1877	1310	2,129
763	67,1					
763	79,9					
221	125,5	763	80,8	2771	1654	2,062
763	81,7					
219	126,3	762	82,3	2702	1690	2,035
761	82,9					
391	114,5	762	83,8	2481	1724	2,040
762	84,6					
761	90,1					
221	133,4	761	90,5	2991	1884	2,053
761	90,8					
285	130,0	761	91,4	2894	1905	2,075
761	92,0					
510	113,3	761	92,5	2451	1931	2,070
761	93,0					
761	123,2					
424	148,1	761	123,8	3432	2726	2,097
761	124,3					
761	42,4					
223	92,2	761	43,5	1924	815	2,059
761	44,5					
493	72,3	761	45,3	1456	852	2,095
761	46,1					

Mittel 2,075

Unten sind die sämtlichen so gefundenen Mittelwerte von  $\frac{P_H - P'_H}{P - P'}$  zusammengestellt. Diese Größen sind proportional  $\varepsilon - 1$  für das betreffende Gas.



Für die Messung *B* wurde die Kompensationsvorrichtung wie oben angegeben, verändert.  $c_3$  war = 1200 cm. Es erübrigte sich die Aufstellung einer besonderen Eichkurve, da jetzt die Änderung von  $c_3$  proportional der von  $c_2$  war, wie es der aufgestellten Formel entsprach.

Als Beispiel führen wir an:

O. 15,0° C.

$P$	$c_3$	$P'$	$c_3'$	$-\frac{c_3 - c_3'}{P - P'}$	Bemerkungen
764	39,0				
211	107,2	764	39,1	0,1232	
764	39,1				
408	84,2	764	39,3	0,1262	
764	39,5				
175	113,3	764	39,8	0,1248	
764	40,0				
192	110,6	764	40,4	0,1228	
764	40,8				
254	103,8	764	41,3	0,1215	
764	41,8				
176	114,6	764	41,9	0,1236	Die vier ersten Spalten haben dieselbe Bedeutung wie oben.
764	42,0				
176	115,3	765	42,5	0,1236	Die Quotienten der letzten Spalte sind wieder proportional $\varepsilon - 1$ , der Proportionalitätsfaktor ist aber ein anderer als vorher.
766	43,0				
360	93,0	766	43,4	0,1221	
766	43,8				
229	109,0	766	44,3	0,1205	
766	44,7				
582	118,1	766	45,1	0,1241	
766	45,5				
766	71,0				
178	144,5	766	71,3	0,1244	
766	71,5				
177	145,0	766	72,9	0,1236	
766	72,8				
280	134,6	766	72,9	0,1220	
766	73,0				
429	117,1	766	73,8	0,1286	
766	74,5				
233	140,7	766	75,0	0,1231	
766	75,4				

Mittel 0,1236

## Zusammenstellung der Resultate.

Die erhaltenen Mittelwerte sind in den einzelnen Reihen auf gleiche Temperatur korrigiert unter der gebräuchlichen Annahme, daß die Temperatur die D.K. nur insofern beeinflußt, als sie die Dichte ändert. Die Werte in *A* und *B* sind wegen des verschiedenen Proportionalitätsfaktors nicht direkt vergleichbar.

Gas	<i>A</i>		<i>B</i>	
Luft . . . .	1,989	Mittel 2,015	0,1311	Mittel 0,1311
	2,018		0,1303	
	2,007		0,1304	
	2,006		0,1324	
	2,052		0,1304	
	2,015		0,1319	
CO <sub>2</sub> . . . .	3,383	Mittel 3,405	0,2265	Mittel 0,2255
	3,411		0,2245	
	3,396			
	3,385			
	3,463			
	3,417			
H . . . . .	3,386			
	3,401			
H . . . . .	0,960	Mittel 0,987	0,0635	Mittel 0,0633
	0,999		0,0630	
	1,001			
N . . . . .	2,129	Mittel 2,101		
	2,073			
N <sub>2</sub> O . . . .			0,2548	Mittel 0,2553
			0,2558	
O . . . . .			0,1234	Mittel 0,1236
			0,1236	
			0,1239	

Die Messungen sind nicht in der hier angegebenen, sondern in willkürlicher Reihenfolge gewonnen; da zwischendurch öfter die Funkenstrecke gereinigt und das Dynamometer justiert wurde, gibt die Übereinstimmung der Resultate gleichzeitig eine Kontrolle für die Konstanz der Eichung.

Für die Quotienten  $\frac{\epsilon - 1}{\epsilon_{\text{Luft}} - 1}$  hat man

Gas	A	B	Mittel aus A und B
CO <sub>2</sub> . . . .	1,691	1,718	1,705
H . . . . .	0,490	0,483	0,487
N . . . . .	1,044		1,044
N <sub>2</sub> O . . . .		1,945	1,945
O . . . . .		0,943	0,943

Um einen Vergleich mit den früheren Bestimmungen der Dielektrizitätskonstanten und mit den Brechungsexponenten zu geben, setzen wir:

$$\epsilon_{\text{Luft}} = 1,000580 \quad \text{für } 0^\circ \text{ und } 760 \text{ mm.}$$

Ich habe diesen runden Wert für  $\epsilon_{\text{Luft}}$  angenommen, da die Werte für die übrigen Gase dann besser mit Klemenčičs Messungen zusammenstimmen. Überhaupt scheint die fünfte Dezimale der absoluten Messungen noch nicht ganz sicher zu sein; vgl. auch die Werte, die K. Tangl<sup>1)</sup> durch Extrapolation aus Messungen bei höheren Drucken erhält.

Gas	Rohmann $\epsilon$	Klemenčič <sup>2)</sup>	Boltzmann	Tangl
Luft	1,000580	1,000586	1,000590	1,000576
CO <sub>2</sub>	1,000989	1,000985	1,000946	
H	1,000282	1,000264	1,000264	1,000273
N	1,000606			1,000581
N <sub>2</sub> O	1,001129	1,001158	1,000994	
O	1,000547			

Gas	$n^2$ für $\lambda = \infty$ <sup>3)</sup>	
	Clayton-Rentschler	Scheel
Luft . . . .	1,000581	1,000574
CO <sub>2</sub> . . . .	1,000898	
H . . . . .		1,000272
N . . . . .	1,000588	1,000581
N <sub>2</sub> O . . . .		1,001032
O . . . . .	1,000539	

1) K. Tangl, Ann. d. Phys. 26. p. 59. 1908.

2) I. Klemenčič, Wiener Ber. 91. 2. p. 712. 1885.

3) Clayton-Rentschler, Astrophys. Journ. 28. p. 345. 1908. Ref. Zeitschr. f. Instrumentenk. 29. p. 164. 1909; K. Scheel, Ber. d. D. Physik. Ges. 9. p. 30. 1907. N<sub>2</sub>O ist den Tabellen von Landolt-Börnstein entnommen.

Die erhaltenen Werte zeigen also mit denen von Klemenčič gute Übereinstimmung. Die Maxwellsche Relation  $\epsilon = n^2$  ist ziemlich erfüllt; es ist aber zu beachten, daß die Differenz, die bei den leicht kondensierbaren Gasen  $\text{CO}_2$  und  $\text{N}_2\text{O}$  auftritt, weit außerhalb der Beobachtungsfehler liegt. Von gewissen theoretischen Vorstellungen ausgehend, könnte man zu dem Schluß kommen, daß die Abweichung bei größerer Verdünnung verschwände. Ich habe daher Bestimmungen für  $\text{CO}_2$  von 0 bis 100 mm Druck versucht. Da aber die Beobachtungsfehler sich vergrößern, ergab sich bislang kein eindeutiges Resultat, doch ist die Methode sicher noch bedeutender Verfeinerung fähig.

#### Resultate.

1. Es wurde eine Methode ausgearbeitet, die es gestattet, Kapazitätsänderungen mit schnellen Schwingungen auf  $\pm 0,00001$  genau zu messen.

2. Damit wurden die Dielektrizitätskonstanten von einigen Gasen gemessen, von denen N und O noch nicht bestimmt waren.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, meinem hochverehrten Lehrer Hrn. Prof. Braun für seine vielfachen Ratschläge meinen besten Dank auszusprechen. Hrn. Privatdozent Dr. Mandelstam bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine stets bereite Unterstützung aufs tiefste verpflichtet.

Straßburg i/E., Physik. Inst., 15. Februar 1911.

(Eingegangen 18. Februar 1911.)

**9. Zur Spektroskopie des Sauerstoffs.**  
**Antwort an Hrn. Kayser;**  
**von W. Steubing.**

Kürzlich hat Hr. Kayser „im Interesse der Wissenschaft“, wie er eingangs und zum Schluß betont, eine Kritik meiner Untersuchung: „Fluoreszenz und Bandenspektren des Sauerstoffs“<sup>1)</sup> veröffentlicht. Da ich für meine Person nicht glaube, daß es „im Interesse der Wissenschaft“ liegt, eine Diskussion in einer Tonart zu führen, wie sie Hr. Geheimrat Prof. Dr. H. Kayser dabei beliebt hat, beschränke ich mich auf eine Erwiderung dessen, was er gegen die Richtigkeit und Beweiskraft meiner Arbeit anführt.

Hr. Kayser bekämpft eine von mir neu eingeführte Definition der Abschattierungsrichtung einer „Bande“ als „absolut falsch“. Ebenso anstößig sind ihm einige von mir angewendete Bezeichnungen und Hypothesen. Was mich dazu veranlaßte, ist betreffenden Ortes<sup>2)</sup> dargelegt. Ich glaube nicht, daß durch eine neue Definition und Verwendung neuer Bezeichnungen die Wissenschaft Schaden leidet. Ich weise jedenfalls die unbegründete Behauptung zurück, daß ich meine Definition ad hoc aufgestellt hätte, weil zu den von mir verwendeten Hypothesen der Sauerstoff hätte passen „müssen“, die negativen Banden hätten nach Rot abgeschattiert sein „müssen“.<sup>3)</sup>

1) W. Steubing, Ann. d. Phys. **33**. p. 553. 1910.

2) l. c.

3) Hier widerspricht sich Hr. Kayser: er sagt p. 499, Zeile 16, 17: „es sollen die negativen Banden des O nach langen Wellen (d. i. Rot) abgeschattiert sein, was sie nicht sind“. Auf der gleichen p. 499, Zeile 30 ff. sagt er: „zu diesen Hypothesen soll nun der O passen, also . . . die sogenannten negativen Banden, die im langwelligen Teil liegen, müssen

Mit meinen Darlegungen wäre der gegenteilige Verlauf der Bande ebenso verträglich gewesen, denn gerade die negativen Banden spielen für die Deutung meiner Beobachtungen nach der Valenzlehre von Hrn. Stark nur eine untergeordnete Rolle. Über den Wert und die Richtigkeit von Definitionen und Zeichnungen zu streiten, scheint mir jedoch überflüssig. Wichtiger ist, was Hr. Kayser zu den Messungen und gezogenen Folgerungen sagt:

Ich hebe zunächst hervor:

Hr. Kayser stützt seine Kritik über die Genauigkeit der Messungen, Zahlenangaben, Intensitätsverlauf usw. fast ausschließlich auf die beigegebene Kopie der Aufnahmen. Das gilt besonders von den Aufnahmen meiner Fluoreszenzbanden auf Schumannplatten. Es ist bekannt, daß ein Abdruck nicht die Feinheiten des Originals wiedergibt. Da es außerdem sehr schwierig ist, Schumannplatten so gleichmäßig herzustellen, wie gewöhnliche Trockenplatten, läßt sich nicht einmal aus der Betrachtung einer Originalplatte das ganze Spektrum beurteilen. Ich habe *nicht weniger als 40 Aufnahmen* dieser Banden auf Schumannplatten erhalten. *Brauchbare Plattenkopien eventuell Originalschumannplatten stehen Interessenten gerne zur Verfügung.*<sup>1)</sup> Meine mikroskopischen und mikrophotometrischen, in Tabellen niedergelegten Angaben werden dagegen von Hrn. Kayser ignoriert!

Zur Kritik des „negativen“ Bandenspektrums bemerke ich folgendes: a) Was Hr. Kayser über zu geringe Dispersion an-

*nach Violett abgeschattiert sein*“. Ich habe nur letzteres auf Grund meiner Definition behauptet. — Übrigens findet Hr. Kayser wohl seine eigene Definition selber nicht ausreichend, da er sich auf der folgenden p. 500 nochmals widerspricht und auf Grund seiner Definition über Serienrichtung, Abschattierung usw. sagt, Zeile 5 u. 6: *es ist also kein Zweifel*, daß die Banden *nach Rot hin verlaufen*, es stimmen in diesem Falle sogar *Serienrichtung und Abschattierung überein* (NB. welche Serien hat Hr. Kayser hier gefunden?); dann sagt er wieder auf derselben Seite, Zeile 24 und 25: man kann daher *nur aussagen*, daß die Banden *nach beiden Seiten hin abgeschattiert* sind. Was ist richtig?

1) Ich hätte sie vorher auch Hrn. Kayser zu einer sachlichen Kritik gerne überlassen.

führt, ist schon durch meine Angabe erledigt, daß es mir nicht darauf ankam<sup>1)</sup>, exakte Wellenlängenmessungen für diese Banden auf  $\frac{1}{100}$  Å.-E. auszuführen, dazu fehlten mir die Mittel, auch war dies für meine Zwecke überflüssig. — b) Wenn Hr. Kayser von den „Nebenbanden“ nur zwei überhaupt sieht, so liegt das an der Reproduktion, die Originalplatte zeigt sie ganz deutlich, die Tabelle ergibt das auch ohne weiteres. — c) Den Widerspruch zwischen meiner Definition und meiner Erklärung, die Banden seien nach Violett abgeschattiert, bringt Hr. Kayser dadurch hinein, daß er teils seine, teils meine Definition anwendet. So beruft er sich darauf, daß die Abstände der Linien nach Violett zusammenrückten; der Linienabstand ist aber in meiner Definition ausdrücklich ausgeschaltet. Ich habe definiert<sup>2)</sup>: es soll für die Abschattierungsrichtung (d. i. den Verlauf der Bande) maßgebend sein, *nach welcher Seite bei verlängerten Expositionen oder gesteigerter Gesamtintensität die Bande wächst bzw. ihre Linienzahl zunimmt, nicht aber, nach welcher Seite die Abstände einzelner Linien oder Gruppen mehr oder weniger regelmäßig wachsen.*

*Wenn Hr. Kayser auf Grund eigener Experimente den Nachweis bringt, daß nicht nur, im Gegensatz zu meinem Befund, die Linienzahl nach Violett hin nicht zunimmt bei gesteigerter Expositionszeit, sondern daß auf der roten Seite der Kanten neue Linien auftreten, nehme ich meine Angabe zurück.*

Wenn Hr. Kayser einmal die Nebenbanden, in denen die Intensität stark abklingt, als Teil der Hauptbanden anspricht und andererseits trotzdem behauptet, die Intensität der Banden wachse von Rot nach Violett, so verstehe ich diesen Widerspruch nicht. Man vergleiche die mikrophotometrischen Messungen der Linien, die deutlich zeigen, daß die Intensität von Rot her anfangs etwas zunimmt, ein Maximum erreicht und dann sehr stark nach Violett hin fällt. Jedenfalls ist ein Widerspruch zwischen meiner obigen Definition und meinen Angaben nicht vorhanden.

Bei der Besprechung meiner Aufnahmen vom Sauerstoff-

1) W. Steubing, l. c. p. 553 unten.

2) l. c. p. 554, Zeile 22 ff.

spektrum in Emission im äußersten Ultraviolett, behauptet Hr. Kayser: „er sagt aber, es hätten sich drei Kanten messen lassen“. Diese Behauptung des Hrn. Kayser ist unrichtig; ich habe *nirgends* gesagt, ich hätte *drei Kanten* messen können, wohl aber die (Anfangs- und End-)Kanten dreier Banden d. h., drei der Banden ihrer Gesamtausdehnung und spektralen Lage nach (vgl. die Zahlenangaben der Tabelle p. 572, aus denen dies hervorgeht). — Da diese Banden in Breite und Aussehen sich von anderen unterscheiden (ganz auffällig von den sogen. CO-Banden), da sie in ein und derselben Röhre nur bei O-Füllung, der sorgfältigst gereinigt und getrocknet war, auftreten, da keiner von den Forschern, die Gase in diesem Gebiet untersuchten (Schumann, Lyman), hier Banden von anderen Gasen außer CO gefunden, wohl aber Schumann drei kontinuierliche (infolge weit geringerer Dispersion) Maxima des Sauerstoffs in diesem Gebiet fand, war ich berechtigt, diese Banden für Sauerstoffemissionsbanden zu erklären. Andere Gründe (so Lymans Befund der Sauerstoffabsorptionsbande, Schumanns Absorptionsstreifen) sind in der Arbeit ausdrücklich erwähnt, werden aber von Hrn. Kayser *insgesamt übergangen*. — Wenn Hr. Kayser Gründe hat, das Spektrum einem anderen Gase oder Verunreinigungen (welchen?) zuzuschreiben, bitte ich ihn, sie *wenigstens* anzuführen. —

Weiter bezweifelt Hr. Kayser die Fluoreszenzbanden des Luftsauerstoffs. Dies Spektrum erhielt ich bei Anregung mit Hg-Lampe und Al-Funken in Luft. Hr. Kayser bestreitet nicht die Fluoreszenz der Luft, „aber“, fährt er fort, „wodurch ist bewiesen, daß es gerade der Sauerstoff der Luft ist, der fluoresziert.“ *Meinen wahren Grund*, daß die spektrale Lage der drei Banden, und ihre Ausdehnung mit der der obigen Emissionsbanden übereinstimmt, zumal in einem Gebiet, wo die Dispersion des Quarzspektrographen derjenigen guter Rowlandgitter gleichkommt, *erwähnt Hr. Kayser nicht, behauptet dagegen*, eine eingeschobene Bemerkung von mir „Es ist interessant usw. sei mein einziger *«Beweis»*“. Im Falle der „Luftfluoreszenz“ kommt außer dem Sauerstoff, für den obiges stimmt, wohl nur Stickstoff in Betracht und gegen letzteren spricht verschiedenes. Wenn Hr. Kayser letzteren trotzdem für den Fluoreszenzträger hält, bitte ich ihn, einen Grund, besser noch einen „Beweis“ an-



zuföhren und meine Versuche mit verbesserten Mitteln zu wiederholen.

Hr. Kayser findet ferner einen Widerspruch in meinen Angaben, daß Fluoreszenz- und Emissionsbanden identisch seien, weil ich die Intensitätsverteilung in beiden Fällen eine wesentlich andere genannt habe. Es ist wohlbekannt, daß ein Spektrum, wenn es unter verschiedenen Bedingungen erzeugt ist, sich in der Intensitätsverteilung in den Linien ändert und doch denselben Körper als Träger hat. Hrn. Kayzers sonstige Kritik über Messung „dreier“ Kanten, Unmöglichkeit genauer Messung, fragliche Abschattierung ist durch das vorausgeschickte p. 1004, Zeile 10 ff., schon erledigt. Hr. Kayser kennt weder das ganze Beobachtungsmaterial, noch beachtet er die Angaben Tabellen. Glaubt Hr. Kayser vielleicht, ich hätte die Lage der von Bande I auf Zehntel Å.-E. angeben und messen können, wenn ihr Kopf durch Quarzabsorption unsichtbar geworden wäre? Wie Hr. Kayser dann sagen kann, das Bandenspektrum scheine ihm unbewiesen, es blieben nur die „3 kontinuierlichen Streifen Schumanns“, ist mir unverständlich.

Zu Hrn. Kayzers Erörterungen meines Abschnittes über die sogenannten Wasserdampfbanden, die ich dem Sauerstoff zurechne, habe ich folgendes zu bemerken: Hr. Kayser führt eine *Prioritätsbemerkung*, die ich mache, als „Beweis“ an. Als eine Widerlegung meiner auf Versuchen fußenden Gründe kann ich es nicht ansehen, wenn Hr. Kayser behauptet, das fragliche Spektrum gehöre einer Verunreinigung (Wasserdampf) an, und zur Stütze die Kohlenoxydbanden anführt. Verunreinigungen sind stets leicht daran erkenntlich, daß sie bei Inbetriebnahme der Röhre sich anfangs stärker bemerkbar machen und besonders bei langfristigen und wochenlang fortgesetzten Expositionen entweder ganz verschwinden oder schließlich wesentlich schwächer hervortreten gegenüber dem Spektrum des eingelassenen reinen Gases. Dies war auch, wie in meiner Arbeit erwähnt ist, mit den CO-Banden<sup>1)</sup> der Fall. Unrichtig ist die Behauptung Hrn. Kayzers, „das Wasserdampfspektrum erscheint doch mit derselben Hartnäckigkeit in Stickstoffröhren oder beliebigen anderen.“ Das tut es

1) l. c. p. 567.

nicht, und ich habe in meiner Arbeit ausdrücklich erwähnt, daß es gerade Deslandres durch „geeignete“ Mittel (nämlich solchen, die den *Sauerstoff* fortnehmen) gelang, das Spektrum aus Stickstoff und sonstigen Gasen, die keinen Sauerstoff enthalten, zu entfernen.<sup>1)</sup> Warum erwähnt und widerlegt Hr. Kayser dies mit keinem Worte? Statt dessen führt er die Autorität von Huggins, Liveing und Dewar an als „schwerwiegenden Beweis.“ Indem er meine Worte bekämpft: Deslandres habe gesagt, die Banden seien ebenso gebaut, wie die terrestischen Sauerstoffbanden usw., widerspricht er wieder seinen eigenen Worten. Er sagt wörtlich in seiner Kritik auf p. 503, Zeile 5 und 6: „Schon Liveing und Dewar finden keinerlei Ähnlichkeit“. In seinem Handbuch der Spektroskopie Bd. II, p. 489, Zeile 19 finden sich dagegen die Worte: „Liveing und Dewar bestreiten diese Angabe (d. i. genau dieselbe Struktur, wie Deslandres behauptet), sie finden nur eine gewisse Ähnlichkeit“. Wie erklärt Hr. Kayser diesen Widerspruch? In Wirklichkeit sagen Liveing und Dewar in ihrer letzten Abhandlung über die „Wasserdampfbanden“, Phil. Trans. 179. (A) p. 28, Zeile 3: Nevertheless, the similarity of the grouping is very remarkable, as may be seen from the accompanying map, on which are given the lines of A, on a scale slightly reduced from Prof. Piazzzi Smyth's solar spectrum, side by side with the lines of the water spectrum“. Was überhaupt die zitierten Arbeiten von Huggins, Liveing und Dewar betrifft, so ist bemerkenswert, daß sie teils früher wie die Deslandresschen Arbeiten, teils gleichzeitig erschienen sind (1880, 82, 88 gegen 1880 und 88), ich habe nichts finden können, was zur Annahme berechtigt, Deslandres habe weniger sorgfältig gearbeitet wie die drei anderen Autoren oder sei von ihnen widerlegt.<sup>2)</sup>

Hr. Kayser erklärt: ich bin sicher, daß das Spektrum zu O nicht gehört. Jede Begründung dieser Ansicht, etwa

1) l. c. p. 574.

2) Die von Hrn. Kayser zitierte Arbeit von Meyerheim aus seinem Institut liefert nur eine exakte Bestimmung der Bandenlinien auf  $\frac{1}{1000}$  Å.-E. zur Prüfung der Deslandresschen Gesetze, spielt also bei der Frage der Herkunft der Banden absolut keine Rolle.

eigene oder fremde Versuche, durch die Hr. Kayser seine subjektive Meinung stützen könnte, fehlt.

Als letzten Punkt führt Hr. Kayser gegen mich eine Arbeit von Wood<sup>1)</sup>: „Eine neue strahlende Emission seitens des Funkens“ an. Da Hr. Wood selber eine weitere Untersuchung zur Aufklärung wünschenswert erscheint, würde Hr. Kayzers Behauptung, *selbst wenn er Hr. Woods Befund richtig wiedergäbe*, vorderhand nicht beweiskräftig sein. Aber Hr. Kayser behauptet mehr als in der Arbeit steht, seine Bemerkung ist darum hinfällig.

Hr. Wood untersucht eine eigentümliche ultraviolette Lichterscheinung infolge Al-Funken in Luft, photographiert sie mit Quarzoptik in einer Kamera, dann spektral und findet, daß er (wohlgemerkt in Luft) ein Spektrum erhielt, das die sogenannten Wasserdampfbanden, außerdem aber eine Reihe Stickstofflinien enthält. Bei seinen weiteren Photographien *ohne* spektrale Zerlegung der Erscheinung in verschiedenen Gasen findet er, daß in Sauerstoff das Bild des Emissionslichtes weit schwächer war als in Stickstoff und Luft. Daraus geht noch nicht hervor — ganz verschwand das Leuchten nicht —, daß es gerade die sogenannten Wasserdampfbanden waren, die verschwanden. Warum nicht das Stickstofflicht? Andererseits fand Hr. Wood gar keinen Einfluß von Wasserstoff auf die Intensität des Lichtbüschels, einen sehr günstigen, wenn ein schwacher Stickstoffstrahl gegen die Funken geleitet wurde. Hr. Kayser behauptet also mit Unrecht, „daß das Spektrum (der sogenannten Wasserdampfbanden) in Sauerstoff verschwand“. — Ich beabsichtige übrigens, selbst eine genauere Untersuchung dieser erwähnten Erscheinung anzustellen.

Am Schlusse seiner Kritik erklärt Hr. Kayser, daß er „gegen meine Versuche nichts einzuwenden“ habe und zieht daraus einige Zeilen später die Konsequenz, daß „er vor Annahme meiner Resultate warnen müsse“.

*Zusammenfassung:* Hr. Kayser übt an meiner Arbeit eine Kritik, die er

1) R. W. Wood, Physik. Zeitschr. 11. p. 823. 1910.

*ohne Berücksichtigung des ganzen Beobachtungsmaterials unter Mißachtung der tabellarischen Zahlenangaben auf je eine beigegebene Reproduktion stützt.*

Dabei führt er die von mir gegebenen Gründe für meine Folgerungen

*gar nicht oder unvollkommen an, geschweige denn widerlegt er sie.*

Während er die Richtigkeit meiner Erklärung (z. B. der Fluoreszenz des Luftsauerstoffs) anzweifelt, ohne Begründung,

*macht er keinen Versuch, zu einer anderen Erklärung, die experimentell zu prüfen wäre.*

Solange Hr. Kayser nicht auf Grund eigener Untersuchungen seine Ansichten beweisen und meine Resultate widerlegen kann, halte ich diese in allen Punkten aufrecht.

Aachen, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule, 15. März 1911.

(Eingegangen 19. März 1911.)

---

10. *Hrn. H. Kayser zur Antwort;*  
*von J. Stark.*

1. Hr. Kayser hat kürzlich in dieser Zeitschrift<sup>1)</sup>, ohne durch Bezugnahme auf eigene wissenschaftliche Arbeiten Veranlassung zu haben, direkte und indirekte Angriffe auf spektralanalytische Arbeiten von mir veröffentlicht. Dadurch bin ich zu folgender Abwehr genötigt.

Hr. Kayser glaubt gegen die von anderen und mir erweiterte Anwendung der Bezeichnung Bandenspektrum protestieren zu müssen und meint, ich hätte einen Irrtum meinerseits hinsichtlich des „zweiten Wasserstoffspektrums“ erkannt. Leider muß ich Hr. Kayser seine Freude über meine Bekehrung in diesem Punkte durch die Mitteilung zerstören, daß ich unverändert meine Auffassung über dasjenige Spektrum des Wasserstoffs festhalte, welches er nur zweites Wasserstoffspektrum nennen lassen will. Ich rechne es nach wie vor zu der Gruppe der Bandenspektren, da jedenfalls die Mehrzahl seiner Linien im Magnetfeld und in den Kanalstrahlen sich analog wie die Linien des Stickstoff-Bandenspektrums verhält. Dieses selbst möchte ich nur als einen Typ von Bandenspektren betrachten. Auch die Absorptionsbanden von Flüssigkeiten von der Art des Benzols rechne ich zu den Bandenspektren nach wie vor. Wenn Hr. Kayser den gemeinsamen Charakter der von mir als Bandenspektren bezeichneten Spektren nicht berücksichtigen will, wenn er dieses Wort, allein unter dem Gesichtspunkt eines vermuteten serienhaften Baues nach Art der Stickstoffbanden, auf die von ihm zugelassenen Spektren beschränken will, so mag er dies für sich tun. Er möge indes andere Autoren in Ruhe lassen, welche eine spektralanalytische Bezeichnung in weiterem Sinne gebrauchen, als ihm gut dünkt.

1) H. Kayser, Ann. d. Phys. 34. p. 498. 1911.

2. Hr. Kayser behauptet, ich hätte die von Schumann bei  $185\ \mu\mu$  gefundenen „drei kontinuierlichen Maxima“ früher vergebens gesucht. Er gibt hiermit wieder ein Beispiel seiner Leichtfertigkeit, mit welcher er die wissenschaftlichen Arbeiten ihm nicht sympathischer Autoren zu besprechen gewohnt ist.

Ich habe ausdrücklich erklärt, daß sich meine damaligen Untersuchungen nur bis  $240\ \mu\mu$  erstreckten. Hätte ich die Emission des Sauerstoffs unterhalb dieser Grenze bis zu  $185\ \mu\mu$  untersuchen wollen, so hätte ich, dessen mag Hr. Kayser versichert sein, diese Untersuchung mit einem hierfür geeigneten Spektrographen und mit Schumannplatten ausgeführt, und wenn es mir wirklich nicht gelungen wäre, in der Gegend von  $185\ \mu\mu$  wie Schumann eine Emission aufzufinden, so hätte ich dies in meiner Mitteilung ausdrücklich bemerkt.<sup>1)</sup>

---

1) Bei dieser Gelegenheit möchte ich eine andere mich betreffende den Tatsachen nicht gerecht werdende Berichterstattung des Hrn. Kayser zurückweisen.

Im Anfang einer Untersuchung von mir über zwei Linienspektren des Quecksilbers (Ann. d. Phys. 16. p. 490. 1905) findet sich folgender Abschnitt unter der Überschrift „Einleitung und Problemstellung“:

„Die Aufgabe der vorliegenden Untersuchung bestand nicht in einer Steigerung der Genauigkeit in der Ausmessung des Quecksilberspektrums; es wurden ihr vielmehr die von Kayser und Runge, Eder und Valenta ausgeführten Messungen der Wellenlängen des Quecksilbers als genau zugrunde gelegt. Ihre Aufgabe bestand darin, die elektrischen Bedingungen für die Emission des Quecksilberspektrums gut zu definieren, sie nach Möglichkeit konstant zu halten und zu untersuchen, ob die Struktur des Linienspektrums des Quecksilbers abhängig ist von speziellen elektrischen Bedingungen.“

Ich wies in dieser Untersuchung nach, daß das bekannte Linienspektrum des Quecksilbers allein da auftritt, wo so langsame Kathodenstrahlen wie in der positiven Lichtsäule in Hg-Dampf verlaufen, daß dagegen die schnellen Kathodenstrahlen der negativen Glimmschicht neben jenem Spektrum noch ein zweites sehr linienreiches Spektrum des Quecksilbers zur Emission zu bringen vermögen. In seinem Handbuch der Spektroskopie V. Bd. p. 552 erwähnt Hr. Kayser weder jene Problemstellung noch dieses Resultat, sondern schreibt mit bezug auf meine Arbeit lediglich: „Die Zahlen von Stark sind im wesentlichen eine Abschrift derer von Eder und Valenta.“ Ich lege Verwahrung ein gegen Hrn. Kayser's tendenziöse Darstellung, welche in dem Verschweigen der von mir gekennzeichneten Problemstellung, sowie in dem Worte „Abschrift“ liegt.

3. Hr. Kayser bezeichnet meine spektralanalytischen Hypothesen an einer Stelle als „durch nichts begründet“, an einer anderen als „vage Spekulationen“. Dieses Urteil erklärt sich wohl daraus, daß Hr. Kayser meine spektralanalytischen Arbeiten, soweit überhaupt, nur sehr oberflächlich gelesen hat oder, daß ihm für die theoretische Seite der Spektralanalyse das Verständnis fehlt. Nicht den Vorwurf der Unbestimmtheit, sondern den Vorwurf, zu speziell, zu eng zu sein, kann man gegen die von mir vertretenen Hypothesen erheben, nämlich gegen die Hypothesen über die Träger der Linienspektren und der Bandenspektren und die Hypothese über den Zusammenhang zwischen der chemischen Valenz und der Lage der Bandenspektren. Da indes diese Hypothesen Arbeits-hypothesen sein sollen, so müssen sie für den Experimentalphysiker und den Chemiker jene Eigenschaft der Anschaulichkeit und Spezialisierung haben. Auch habe ich mich nicht darauf beschränkt, jene Hypothesen aufzustellen, sondern habe mich wenigstens bemüht, sie in experimentellen Arbeiten fruchtbar zu machen. Sie gaben den Anlaß und den Fingerzeig zur Auffindung des Dopplereffektes bei Kanalstrahlen, zur Aufsuchung der ultravioletten Fluoreszenz des Benzols und seiner Derivate, zur Auffindung eines Zusammenhanges zwischen Fluoreszenz und lichtelektrischem Effekt; auf Grund ihrer Vorhersage fand Steubing neue ultraviolette Banden, die Fluoreszenz und Ionisierung des Quecksilberdampfes<sup>1)</sup>, ferner die ultraviolette Fluoreszenz des Sauerstoffs.<sup>2)</sup> Über die systematische und heuristische Brauchbarkeit der von mir vertretenen Valenzhypothese in spektrochemischer Hinsicht kann Hr. Kayser in dem ausgezeichneten Buch von H. Ley „Die Beziehungen zwischen Farbe und Konstitution bei organischen Verbindungen“ (S. Hirzel, Leipzig 1911) nachlesen.

Wenn Hr. Kayser auf seine absprechende Kritik der von mir vertretenen spektralanalytischen Hypothesen eigene positive Tätigkeit folgen lassen und jene Hypothesen durch andere ersetzen wird, welche in systematischer und heuristischer Hinsicht mehr leisten, so werde ich der erste sein, der von

1) W. Steubing, Physik. Zeitschr. 10. p. 787. 1909.

2) W. Steubing, Ann. d. Phys. 33. p. 553. 1910.

ihnen Gebrauch machen wird. Hr. Kayser beschränkt sich darauf, summarisch ein Werturteil über die von mir vertretenen Hypothesen abzugeben und hält es im Interesse der Wissenschaft für seine Pflicht vor Arbeiten, die sich ihrer bedienen, zu warnen. Demgegenüber möchte ich bezweifeln, ob Hr. Kayser's eigene positive wissenschaftliche Tätigkeit in experimenteller und theoretischer Hinsicht auf dem Gebiete der von ihm kritisierten Arbeiten ihn genügend kompetent dafür erscheinen läßt, daß er vor diesen Arbeiten ohne eine sachliche eingehende Begründung mit einem allgemeinen Werturteil warnt; nach meiner Ansicht kann es Hr. Kayser den Lesern der *Annalen der Physik* überlassen, in spektralanalytischen Dingen sich ein eigenes Urteil zu bilden.

Aachen, Physik. Inst. d. Techn. Hochsch., 16. März 1911.

(Eingegangen 19. März 1911.)



11. *Elektrische Dispersion von Wasser  
und Äthylalkohol für sehr kurze Wellen;  
von H. Merczyng.<sup>1)</sup>*

§ 1. In einer früheren Arbeit<sup>2)</sup> habe ich mit Hilfe einer Reflexionsmethode den elektrischen Brechungsexponenten für eine Wellenlänge von 4,5 cm (in der Luft) für eine Reihe von Flüssigkeiten bestimmt. Für alle sechs damals untersuchten flüssigen Körper (Glyzerin, Methylalkohol, Amylalkohol, Essigsäure, Anilin, Äthyläther) lagen die Brechungsexponenten (und ihre Quadrate) für  $\lambda = 4,5$  cm noch in dem Teile des elektrischen Spektrums, wo der Brechungsexponent von seinem definitiven, für  $\lambda = \infty$  geltenden Wert meistens weit entfernt ist; deshalb sind die gewonnenen Resultate für das Studium der allgemeinen Dispersionskurve wichtig gewesen. Dabei tritt, wie in der zitierten Arbeit bemerkt wurde, überall sogenannte „anomale“ Dispersion auf. Der Brechungsexponent *wächst* mit dem Anwachsen der Wellenlänge, gerade umgekehrt, als wir es im optischen Spektrum konstatieren können.

Für Wasser wurde bis jetzt die Verminderung des Brechungsexponenten für elektrische Strahlen mit der Wellenlänge nicht beobachtet. Zwar besitzen wir schon von Cole<sup>3)</sup> Bestimmungen des Brechungsexponenten des Wassers für Wellen von einer Länge, welche sich der unsrigen (5 cm in der Luft) nähert, aber diese Werte ( $n = \sim 8,9$ ;  $n^2 = \sim 80$ ) sind in den Grenzen der Beobachtungsfehler mit den für unendlich lange Wellen nach der Kondensatormethode gefundenen

1) H. Merczyng, Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie (A) 1911, Février, p. 123.

2) H. Merczyng, Compt. rend. de l'Acad. d. Sc. de Paris 1909: Études sur les ondes électromagnétiques très courtes. Réflexion et dispersion anormale des liquides, 1909; Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie (A) 1910: Studien über das elektrische Spektrum im Gebiete sehr kurzer Wellen; Ann. d. Phys. 33. p. 1. 1910; Journ. d. russ. phys.-chem. Gesellsch. 42. 1910.

3) F. N. Cole, Wied. Ann. 57. p. 290. 1896.

identisch. Auf diese Weise muß man, um die Veränderlichkeit dieser Konstante für Wasser zu bestimmen, noch weiter gehen, als es Cole und wir in unserer ersten Arbeit<sup>1)</sup> getan haben. Lampas Bestimmungen deuten sogar auf ein wenig wahrscheinliches Wachsen des Brechungsexponenten mit abnehmender Wellenlänge hin.<sup>2)</sup>

§ 2. Nun wachsen aber die Schwierigkeiten des Versuches mit noch kleineren Wellenlängen in sehr hohem Grade, da die Intensität der Strahlung mit wachsender Frequenz außerordentlich abnimmt. Dazu werden die Bestimmungen speziell mit Wasser dadurch erschwert, daß, wie ich darauf schon in meiner ersten Arbeit hingewiesen habe, Wasser (und auch Äthyläther) ein von sehr vielen Absorptionsstreifen durchsetztes Spektrum besitzt. Deshalb ergeben kleine Änderungen der Frequenz (wie das unter anderem bei Veränderung der Dämpfung im Oszillator geschehen kann) oft stark differierende Resultate. Könnte man die Wellenlängen unter 5 cm mit derselben Schärfe bestimmen, wie die über 10—20 cm (vermittelt der Lecherschen Brücke), so wäre es leicht, das Spektrum in einzelne Streifen zu zerlegen. Leider gestattet die Interferenzmethode die Bestimmung von kleinen Wellenlängen nur mit einer Schärfe bis zu einigen Prozenten und sie ist von allen hier in Betracht kommenden absoluten Methoden für Bestimmungen so kurzer Wellenlängen am genauesten, da die theoretische Bestimmung, aus der Größe des Oszillators, gar keinen praktischen Wert hat.<sup>3)</sup> Die Maxima und Minima der Interferenzkurven verlaufen nämlich ziemlich flach, besonders für Wellenlängen, welche unter 4,5 cm bleiben. Aus dem plötzlichen Wechseln des Beobachtungsergebnisses kann man also nur approximativ auf die Lage eines Streifens in dieser Gegend schließen. In dieser Hinsicht ist es interessant, die „Breite“ und die Amplitude dieser Absorptionsstreifen in

1) Hier müssen wir bemerken, daß Colley, im Gegensatz zu Cole, schon ein Sinken der Dispersionskurve für Wellenlängen von ca. 22,5 cm bis auf  $n^2 = \sim 70$  fand (vgl. weiter unten).

2) A. Lampa, Wiener Ber. 104, (II A). p. 980. 1895; 105, (II A). p. 253. 1896.

3) Vgl. unseren Aufsatz im Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie (A) 1910. p. 108.

dem von Colley<sup>1)</sup> untersuchten Teile des elektrischen Wasserspektrums für große Wellenlängen (über 20 cm Luft) zu bestimmen, da wir daraus wenigstens annähernd die Verhältnisse in dem von uns untersuchten Teile (3,5 bis 4,5 cm) schätzen lernen können.

Für Wasser fand Colley, daß für Wellenlängen von ca. 110 cm bis ca. 60 cm (in der Luft) der Brechungsexponent keine Absorptionsstreifen aufweist und einen fast konstanten Wert von ca. 8,96 besitzt ( $n^2 = 80,3$ ;  $n^2$  für unendlich lange Wellen nach Heerwagen<sup>2)</sup> 80,9, nach Turner<sup>3)</sup> 81,1). Dann folgt für Wellen von ca. 60 bis ca. 35 cm eine Spektralgegend mit Dispersionsstreifen, 20 an der Zahl. Die Breite und Amplitude der Streifen hängt innig mit der Dämpfung der elektrischen Entladung zusammen. Da diese in der Lecher'schen Methode für verschiedene Versuchsbedingungen veränderlich ist, so erhielt auch Colley vier verschiedene Kurven, die zwar analoge Streifen enthalten, aber sich miteinander nicht decken. Wenn wir seine mit I bezeichnete Kurve in Betracht ziehen, so finden wir die größte Amplitude beim Streifen 2. Für ein Anwachsen der Wellenlänge um ca. 1 cm (von Tal zu Berg) haben wir eine Veränderung des Brechungsexponenten von ca. 8,88 bis  $\sim 9,1$ , d. h.<sup>4)</sup>:

$$\frac{dn}{d\lambda} = 0,22 \text{ (cm}^{-1}\text{)}.$$

Es gibt aber auch Streifen, deren Breite (von Tal zu Tal) kaum 1 cm beträgt und für die man wohl bis

$$\frac{dn}{d\lambda} = \sim 0,3 \text{ (cm}^{-1}\text{)}$$

annehmen kann. Dann wurde der weitere Teil des Wasserspektrums noch bis  $\lambda = 22,4$  cm verfolgt, wo keine Streifen mehr angegeben sind, dabei aber für die kleinste Wellen-

1) A. Colley, Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **39**. p. 210. 1907.

2) F. Heerwagen, Wied. Ann. **48**. p. 35; **49**. p. 272. 1893.

3) Turner, Zeitschr. f. physik. Chem. **35**. p. 385. 1900.

4) Diese Zahlenresultate sind von uns auf Grund der Colleyschen Kurven berechnet.

länge schon ein Sinken des Brechungsexponenten bis  $\sim 8,4$  ( $n^2 = 70,56$ ) notiert.

§ 3. Auf diese Weise kann man im großen und ganzen in der Dispersionskurve von Flüssigkeiten zwei verschiedene charakteristische Merkmale beobachten. Das Hauptmerkmal ist, wie auch für die sechs früher von uns untersuchten Flüssigkeiten, die allgemeine Veränderlichkeit, das Anwachsen des Brechungsexponenten von einem unbekannten, zwischen den optischen und den elektrischen Wellen liegenden Minimum, bis zum Werte, der den unendlich langen Wellen entspricht; ein weiteres Merkmal besteht darin, daß wir in gewissen Teilen der allgemeinen Dispersionskurve Systeme von Absorptionsstreifen finden, die aber den allgemeinen (mittleren) Gang der ganzen Kurve, der anomalen Dispersion entsprechend, nicht stören.<sup>1)</sup> Ob für Wasser die allgemeine Dispersionskurve mit zunehmender Wellenlänge tatsächlich abfällt und der von Colley beobachtete Wert von 8,4 nicht von den eigentümlichen Dämpfungsverhältnissen abhängt, könnte nur durch eine besondere Untersuchung entschieden werden.

Unsere Versuchsanordnung war dieselbe wie bei unserer ersten Arbeit. Ein Righischer linearer Oszillator in Petroleum sendete ein elektrisches Strahlenbündel aus, das durch eine mit Petroleum gefüllte Kugelflasche parallel gerichtet wurde; unter einem bekannten Winkel ( $41^\circ$ ) auf die Oberfläche der untersuchten Flüssigkeit projiziert und nach der Reflektierung von einem parabolischen Spiegel aufgefangen, wirkte es auf einen im Brennpunkte des Paraboloids befindlichen Wellenindikator ein. Als Indikator diente das früher von uns beschriebene Thermoelement. Die am Rubenschen Panzergalvanometer gemessene Intensität der von Wasser reflektierten Welle wurde dann mit dem Reflex vom Quecksilber verglichen. Wenn  $R$  das Verhältnis der Intensitäten,  $i$  den Einfallswinkel,  $n$  den zu bestimmenden Brechungsexponenten bezeichnen, so ist, wie früher bewiesen wurde,

$$n = \sqrt{y^2 + \sin^2 i},$$

1) Hier erlauben wir uns, das vorläufige Resultat einer von uns noch nicht abgeschlossenen Arbeit mit verflüssigten Gasen mitzuteilen, daß deren Dispersionskurve, wie es scheint, einen ganz anderen Verlauf hat, als bei den übrigen Flüssigkeiten.

wo

$$y = \frac{\cos i (1 + \sqrt{R})}{1 - \sqrt{R}}.$$

Nur in einem, jedoch sehr wesentlichen Punkte war ein Unterschied zwischen den früheren Messungen und den jetzigen zu finden. Außer dem alten Oszillator mit  $\lambda = 4,5$  cm, der Frequenz  $N = 6670 \cdot 10^6$  entsprechend, benutzten wir jetzt noch einen anderen kleineren, wobei es gelang, bis zur Wellenlänge  $\lambda = 3,5$  cm und folglich  $N = 8570 \cdot 10^6$  vorzudringen. Die neue Wellenlänge wurde auch wie früher mit dem Fresnelschen Interferenzspiegel bestimmt. Das Funktionieren des kleinen Oszillators bot aber sehr große Schwierigkeiten. In den meisten Fällen war die Energie so klein, daß die absoluten Ablenkungen des Panzergalvanometers kaum einige Millimeter (beim Abstand der Skala ca. 1 m) betrugen, was natürlich zu wenig war, um irgendwelche Schlüsse daraus zu ziehen. Erst nach längerer Arbeit gelang es, für diese kleine Wellenlänge brauchbare Ablenkungen zu erzielen. Da dieselben für diese kleinen Wellen den Grad der Genauigkeit darstellen, so lassen wir hier einen Auszug aus dem Beobachtungsprotokoll folgen.

Wasser,  $\lambda = 3,5$  cm.

Unmittelbare Ablenkung 8 mm.

Reflex		Korr.	<i>R</i>
Quecksilber . . . . .	60 mm	52 mm	0,63
Wasser . . . . .	41	33	0,66
Quecksilber . . . . .	58	50	0,64
Wasser . . . . .	40	32	0,60
Quecksilber . . . . .	62	54	0,61
Wasser . . . . .	41	33	0,61
Wasser . . . . .	40	32	0,67
Quecksilber . . . . .	56	48	

Alle Messungen stimmen, wie wir sehen, gut miteinander überein, was den Schluß gestattet, daß in dieser Gegend des Spektrums (um  $\lambda = 3,5$  cm) die Dispersionsstreifen wenig entwickelt sind. Das Mittel für  $\lambda = 3,5$  cm beträgt:

$$R = 0,63.$$

Für  $i = 41^\circ$  ist  $\cos i = 0,75$ ,  $\sin^2 i = 0,44$ ,  $\sqrt{R} = 0,79$ , also haben wir:

$$y = \frac{0,75 \times 1,79}{0,21} = 6,40$$

und

$$n = \sqrt{(6,4)^2 + 0,44} = 6,44,$$

was den Brechungsexponenten des Wassers für eine Frequenz von  $N = 8,57 \cdot 10^9$  darstellt.

Auf diese Weise befindet sich  $\lambda = 3,5$  cm schon in derjenigen Gegend des Wasserpektrums, wo  $n^2$  ziemlich weit von seinem Werte für unendlich lange Wellen ( $n^2 = \sim 80$ ) entfernt ist. Für diese Wellenlänge haben wir:

$$n^2 = \sim 41,5.$$

In einem Intervall von  $\lambda = 22,4$  cm, wo Colley  $n = 8,4$  und also  $n^2 = \sim 70,5$  fand, fällt also die mittlere Wasserdispersionskurve auf ca.  $70,5 - 41,5 = 29$  für eine Veränderung der Wellenlänge  $22,5 - 3,5 = 18$  cm, also ca. 1,6 pro 1 cm Wellenlänge. Dieser Umstand läßt schließen, daß der Wert des Brechungsexponenten für unseren zweiten Oszillator ( $\lambda = 4,5$  cm) nur wenig von den soeben bestimmten differieren kann. Wenn die Kurve eine gerade wäre, könnten wir augenscheinlich

$$n^2 = 41,5 + 1,6 = 43,1$$

und

$$n = 6,57$$

erwarten. Wie wir sehen werden, war das experimentelle Resultat nicht weit von dem so berechneten entfernt.

Wasser,  $\lambda = 4,5$  cm.

#### I. Reihe.

(Unmittelbare Ablenkung 7 mm).

		Korr.	R
Hg . . . . .	117	110	0,64
H <sub>2</sub> O . . . . .	77	70	
Hg . . . . .	104	97	0,65
H <sub>2</sub> O . . . . .	70	68	
Hg . . . . .	86	79	0,65
H <sub>2</sub> O . . . . .	58	51	

## II. Reihe.

(Unmittelbare Ablenkung 14 mm).

		Korr.	R
Hg . . . . .	84	70	0,63
H <sub>2</sub> O . . . . .	58	44	0,65
Hg . . . . .	82	68	0,63
H <sub>2</sub> O . . . . .	57	43	0,63
Hg . . . . .	75	61	0,67
H <sub>2</sub> O . . . . .	55	41	

## III. Reihe.

(Unmittelbare Ablenkung 14 mm).

		Korr.	R
Hg . . . . .	130	116	0,62
H <sub>2</sub> O . . . . .	86	72	0,65
Hg . . . . .	125	111	0,64
H <sub>2</sub> O . . . . .	85	71	0,65
Hg . . . . .	123	109	0,60
H <sub>2</sub> O . . . . .	79	65	0,61
Hg . . . . .	120	106	0,63
H <sub>2</sub> O . . . . .	80	66	

Das Mittel aller dieser Bestimmungen ist

$$R = 0,64,$$

woraus sich nach den früheren Formeln ( $\sqrt{R} = 0,8$ )

$$y = \frac{0,75 \times 1,80}{0,20} = 6,75,$$

$$n = \sqrt{(6,75)^2 + 0,44} = 6,79$$

und  $n^2 = 46,1$  ergibt. Dieser Wert steht auch, wie wir gesehen haben, im Einklang mit dem früheren und mit dem durch Extrapolation aus den Colleyschen Versuchen berechneten.

§ 4. Wir müssen hier bemerken, daß frühere Beobachter für diese Gegend des Spektrums höhere Werte als die unserigen erhalten haben. Wir geben eine Zusammenstellung dieser Resultate nach Marx<sup>1)</sup>, die wir auch durch die vor kurzem von Colley gewonnenen Werte und durch die unserigen ergänzen.

1) E. Marx, Wied. Ann. 66. p. 603. 1889.

Dispersion des Wassers.<sup>1)</sup>

	$\lambda$	$n_{17}$	$n_{17}^2$
Drude . . . . .	75 cm	9,07	81,7
	44,1	9,14	83,6
Marx . . . . .	36,5	9,08	82,5
	36,1	8,86	78,5
Colley . . . . .	31,6	8,79	77,2
	30,1	8,70	75,7
	23,5	8,47	71,7
	22,4	8,39	70,4
Cole . . . . .	5	8,80	77,4
Merczyng . . . . .	4,5	6,88	47,3
	3,5	6,54	42,7
Marx . . . . .	3,2	9,22	85
Lampa . . . . .	0,8	8,97	80,4
	0,6	9,40	88,4
	0,4	9,50	90,2

Auf diese Weise finden wir zwischen unseren Messungen und besonders denen von Marx für  $\lambda = 3,2$  cm einen wesentlichen Unterschied. Wenn wir bedenken, was Marx<sup>2)</sup> über die Schwierigkeiten dieser Messungen (mit der Brücke) sagt, so wird ein etwas größerer Fehler — besonders ein konstanter Fehler — nicht ausgeschlossen erscheinen. Was die Lampaschen Bestimmungen betrifft, so wäre, abgesehen von ihrer scheinbaren Genauigkeit (die vierte Dezimalstelle mit Wellen von 0,4 cm nach einer direkten Methode), daraus zu schließen, daß für die kleinsten Wellen wieder ein Maximum des Brechungsexponenten besteht ( $n^2 = 90,2$  für 0,4 cm), was gegen alle anderweitige Erfahrung stößt.<sup>3)</sup>

1) Unsere Werte für die Temperatur  $14^\circ$  sind in der Tabelle auf  $17^\circ$  reduziert mittels der Formel

$$n_{17}^2 = n_\theta^2 + 0,86(17 - \theta).$$

2) E. Marx, l. c. p. 410: „Während das Arbeiten mit Righiresonatoren, wenigstens bei Wellen von 4 cm, äußerst mühselig ist und nur bei größter Sorgfalt bis auf 2 Proz. Genauigkeit gebracht werden kann, und wie mir scheint, erst der Übung des Beobachters bedarf . . .“.

3) Dasselbe spricht auch gegen die Richtigkeit der Marxschen Zahlen. Da die mit größter Genauigkeit gemessenen Colleyschen Werte im Gebiete von 36 bis 22 cm  $n^2$  von 78 auf 70 fallen lassen, so bestünde also ein neues Maximum bei 3,2 cm mit 85. Auch die Marxsche Messung für 36 cm,  $n^2 = 82,5$ , stimmt nicht gut mit der Colleyschen (78,5).



Den hohen Wert von Marx (und teilweise auch den von Cole) kann man leicht durch das Vorhandensein von Dispersionsstreifen in dieser Gegend des Spektrums erklären, wie sie Colley in so großer Zahl für größere Wellenlängen fand. Diese Voraussetzung wurde von uns experimentell bestätigt. Bei einer Messung, wo die Wellenlänge von 4,5 cm künstlich vergrößert wurde (etwa um 5 Proz., wo aber leider die neue Wellenlänge mit unserem Spiegel nicht genau gemessen werden konnte) erhielten wir Werte von  $R = 0,705$  und  $0,712$ , im Mittel also  $0,708 = \sim 0,71$ , woraus sich  $n = 8,6$  ergibt und was auf einen starken Dispersionsstreifen schließen läßt. Wahrscheinlich sind in dieser Gegend noch mehrere derartige Streifen vorhanden.

§ 5. *Äthylalkohol*. Die Bestimmungen für Äthylalkohol wurden in derselben Weise und nach derselben Methode, wie für Wasser, ausgeführt. Da die Reflexionsintensität von Alkohol für diese kleinen Wellen kaum  $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$  der totalen Strahlung beträgt (für Wasser noch fast  $\frac{2}{3}$ ), so war die Arbeit mit der Wellenlänge von 3,5 cm wegen der zu kleinen Strahlungsenergie nicht hinlänglich genau, und die Messungen beziehen sich nur auf die Wellenlänge 4,5 cm. Der Äthylalkohol war 99 prozentig.

#### Beobachtungsergebnisse.

##### I. Reihe.

(Unmittelbare Ablenkung 13 mm.)

		Korr.	$R$
Alkohol . . . .	35	22	0,22
Hg . . . . .	114	101	0,20
Alkohol . . . .	33	20	0,22
Hg . . . . .	105	92	0,20
Alkohol . . . .	31	18	0,22
Hg . . . . .	95	82	

##### II. Reihe.

(Unmittelbare Ablenkung 14 mm.)

		Korr.	$R$
Hg . . . . .	80	66	0,20
Alkohol . . . .	27	13	0,19
Hg . . . . .	81	67	0,19
Alkohol . . . .	27	13	

## III. Reihe.

(Unmittelbare Ablenkung 15 mm.)

		Korr.	R
Hg . . . . .	90	75	0,20
Alkohol . . . . .	29	15	
Hg . . . . .	101	86	0,25
Alkohol . . . . .	37	22	

Mittel aus allen Bestimmungen:

$$R = 0,21,$$

$$\sqrt{R} = 0,46,$$

$$y = \frac{0,75 \times 1,46}{0,54} = 2,15,$$

$$n = \sqrt{(2,15)^2 + 0,44} = 2,25,$$

$$n^2 = 5,06.$$

Wenn wir unsere Resultate mit dem vorhandenen Beobachtungsmaterial vergleichen, so erhalten wir folgende Daten für Äthylalkohol:

Colley zwischen  $\lambda = \sim 92$  cm und 62 cm, Spektrum stark mit Dispersionsstreifen durchsetzt. Ungefährer Mittelwert für  $\lambda = 92$  cm ca.  $n = 4,5$ , für  $\lambda = 62$ :  $n = \sim 4,25$ .<sup>1)</sup>

Drude für 74,6 cm:  $n = 4,8$ .<sup>2)</sup>

Cole erhielt für  $\lambda = 5$  cm:  $n = 3,25$ .<sup>3)</sup>

Marx für  $\lambda = 4$  cm (ungefähr):  $n = 2,97$ .<sup>4)</sup>

Wenn wir bedenken, wie sich nach Marx' eigenen Worten die Beobachtungen mit seiner Brückenmethode schwierig gestalteten, ferner daß er<sup>5)</sup> (für die Wellenlänge von ca. 53 cm) bei einem Unterschiede der Konzentration des Alkohols um nur 1 Proz. eine Änderung des Quadrates der Brechungs-exponenten um 35 Proz. fand, so wird die Differenz zwischen

1) Journ. d. russ. phys.-chem. Gesellsch. 40. p. 121 und Tafel.

2) A. Colley, l. c., erklärt diese Differenz zwischen seinen und den Drudeschen Resultaten dadurch, daß die letzteren fehlerhaft aus den relativen Distanzen der Knoten bestimmt waren.

3) F. N. Cole, Wied. Ann. 57. p. 290. 1896.

4) E. Marx, l. c.

5) E. Marx, l. c. p. 617:  $n^2$  für 99,5 Proz. Alkohol: 20,6; für 98,3 Proz.: 27,6.

dem von ihm gefundenen Werte  $n = 2,97$  und dem unserigen  $n = 2,25$  nicht sehr befremden. Wir wollen bemerken, daß wir einen so großen Einfluß von Wasser in Mischungen (bei  $\lambda = 4,5$  cm) nicht konstatieren konnten. Colley hat für seine Wellenlängen eine eigenartige zackige Kurve für Mischungen aufgestellt, wo die größten Differenzen zwischen Berg und Tal bei 1 Proz. Unterschied in der Konzentration nicht 10 Proz. von  $n$  also ca. 20 Proz. von  $n^2$  übertreffen.

Auf Grund unserer Untersuchungen und Betrachtungen glauben wir folgendes schließen zu können:

1. Die mittlere Dispersionskurve für Wasser bei Wellenlängen zwischen 3,5 cm und 4,5 cm sinkt allmählich gegen das optische Minimum, wie dieses für größere Wellenlängen schon von Colley angedeutet wurde.

2. Wasser besitzt also von diesen Wellenlängen an schon eine anomale Dispersion (der Brechungsexponent wächst mit der Wellenlänge).

3. In der untersuchten Gegend (um  $\lambda = 4,5$  cm) sind Dispersionsstreifen sehr wahrscheinlich.

4. Die anomale Dispersion von Äthylalkohol wird bestätigt.

(Eingegangen 14. März 1911.)

12. Über  
*das magnetische Feld der Kathodenstrahlen;*  
 von A. Joffé.

Die Frage nach den magnetischen Wirkungen der Kathodenstrahlen wurde von H. Hertz<sup>1)</sup> aufgeworfen. Seine Versuche schienen sie im negativen Sinne zu beantworten; zugleich zeigte sich, daß die Kathodenstrahlen weder elektrische Ladung mit sich tragen, noch elektrostatisch ablenkbar sind.

Seitdem aber die negative Ladung der Kathodenstrahlen von J. Perrin<sup>2)</sup> nachgewiesen wurde und andererseits die magnetische Wirkung der elektrischen Konvektion durch Versuche von H. A. Rowland, W. C. Röntgen und A. Eichenwald festgestellt worden ist, wird man wohl auch an der Existenz eines magnetischen Feldes der Kathodenstrahlen nicht mehr zweifeln dürfen. Um so mehr, als das negative Ergebnis von H. Hertz durch die Bemerkung von J. v. Geitler<sup>3)</sup> vollständig aufgeklärt ist: H. Hertz benutzte nämlich eine Röhre, bei der beide Elektroden sich an dem einen Ende befanden. Die axial laufenden Kathodenstrahlen trafen die Glaswand, luden sie auf und erzeugten einen Rückstrom, der im stationären Zustand dieselbe Elektrizitätsmenge im entgegengesetzten Sinne beförderte. Ein solches System aus einem axialen Kathodenbündel und einem gleich großen zylindrischen Rückstrom darf auch nach der Elektronenvorstellung kein äußeres magnetisches Feld erzeugen.

J. v. Geitler<sup>3)</sup> verlegte deshalb die Magnetsadel in das Innere des Rohres und bekam zunächst ein positives Ergebnis, das sich aber später<sup>4)</sup> als vorgetäuscht durch einen Thermstrom erwies.

1) H. Hertz, Wied. Ann. 19. p. 782—816. 1883.

2) J. Perrin, Compt. rend. 121. p. 1130. 1895.

3) J. v. Geitler, Ann. d. Phys. 5. p. 924. 1901.

4) J. v. Geitler, Ann. d. Phys. 7. p. 935. 1902.

Endlich befaßte sich im Jahre 1908 E. Klupathy<sup>1)</sup> mit dieser Frage und erhielt auch ein positives Ergebnis, das aber nicht als eine experimentelle Entscheidung der Frage gelten kann: Es wurde nicht die statische Ablenkung der Magnetnadel durch einen konstanten Kathodenstrom beobachtet, sondern der ballistische Ausschlag beim Einsetzen und Ausschalten des Stromes. Das Ergebnis war günstig nur bei harten Röhren und versagte ganz bei einer Wehnelttröhre, die wegen des kräftigen Kathodenstromes nach der Elektronenvorstellung einen besonders großen Effekt ergeben sollte. Diese Resultate sind auch begreiflich, da E. Klupathy dieselbe Entladungsröhre benutzte wie H. Hertz. Es konnte danach nur eine Wirkung beobachtet werden, solange noch nicht der stationäre Zustand erreicht ist. Diese Einstellungsperiode ist aber um so länger, je härter die Röhre und je höher das Entladungspotential ist.

Die Existenz und Größe des magnetischen Feldes von Kathodenstrahlen ist somit experimentell noch nicht festgestellt. Die angeführte Schlußfolgerung ist aber insofern nicht einwandfrei, als der Kathodenstrom im Gegensatz zu der elektrischen Konvektion von Eichenwald eine Bewegung der Elektrizität ohne Materie repräsentiert. Auch in dieser letzteren Beziehung ist eine quantitative Entscheidung der Frage nicht ohne Interesse.

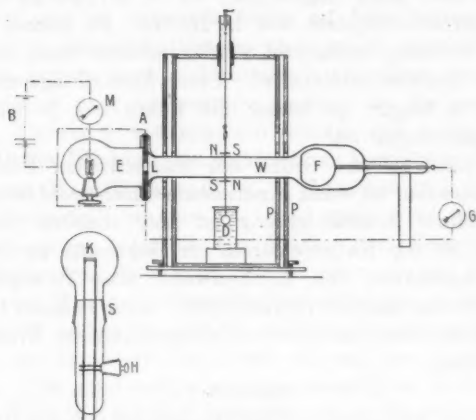
#### **Apparat.**

Für die Konstruktion des Apparates kommen folgende Bedingungen in Betracht:

1. Die Ladung der Kathodenstrahlen muß durch eine besondere Elektrode abgeleitet und gemessen werden. Dabei bilden die Kathodenstrahlen einen Teil der geschlossenen Strombahn.
2. Der Ionenstrom der Entladung darf auf den Magneten keine Wirkung haben.
3. Der Elektronenstrom muß möglichst kräftig sein und das Magnetsystem entsprechend empfindlich.
4. Es muß jeder andere Einfluß durch Kontrollversuche ausgeschlossen werden können.

1) E. Klupathy, *Ann. d. Phys.* **25.** p. 31. 1908.

Der Apparat bestand aus einer Entladungsröhre *E* mit einer Wehneltkathode *K*, die durch einen Schliff *S* um eine vertikale und mittels einer Gabel am Hahn *H* um eine horizontale Achse drehbar befestigt wurde. Das entsprechend gerichtete Kathodenbündel trat durch eine Öffnung *L* in der Anode *A* in ein zweites innen versilbertes Rohr *W*, welches außen mit Stanniol umwickelt war. Ein Teil der Ladung konnte auf die Silberbelegung geraten, floß dann zur Anode zurück und übte somit keine äußere Wirkung aus. Der andere Teil aber, der von der Elektrode *F* durch ein Galvanometer *G*



zur Anode geleitet wurde, erzeugte ein äußeres Magnetfeld, das durch ein astatisches Magnetsystem *NS* gemessen wurde.

Der Entladungsstrom wurde durch eine Hochspannungsbatterie geliefert und möglichst induktionsfrei geführt. Ebenso konnte die magnetische Wirkung des Heizstromes genügend herabgesetzt werden.

Das Magnetsystem hing auf einem Quarzfaden und hatte einen Dämpfer *D*, der in Vaselineöl tauchte. Durch zwei Eisenpanzer *PP* wurde das System von magnetischen, elektrischen Störungen und Luftströmungen geschützt. Die Schwingungsdauer betrug 10–12 Sek., die Einstellung war nahezu aperiodisch.

Zur Eichung der erhaltenen Ausschläge wurde das Entladungsrohr durch einen Draht ersetzt. Der von einem Akkumulator gelieferte Strom wurde durch dasselbe Galvanometer  $G$  gemessen.

Statt der Röhre  $W$  wurde auch eine andere ohne Verengung und mit einer halbdurchsichtigen Silberschicht benutzt. Die Elektrode  $F$  war da durch einen doppelwändigen Zylinder ersetzt mit einer Öffnung zur Aufnahme der Kathodenstrahlen; die äußere Hülle war mit der Anode verbunden.

#### Fehlerquellen.

Es konnte leicht festgestellt werden, daß das Galvanometer  $G$  tatsächlich die Kathodenstrahlen mißt. Bei der dünnen Silberschicht war das Kathodenbündel gut sichtbar. Durch Annäherung eines Magneten wurde das Bündel seitlich abgelenkt. In dem Moment, wo das Bündel die Elektrode  $F$  verließ, verschwand auch der Strom im Galvanometer. Eine andere Entladungsart (etwa ein Ionenstrom) ist auch in einem Raum  $W$ , wo kein elektrisches Feld existiert, nicht zu erwarten. (Die Aufladung der Elektrode  $F$  gegen die Silberwand blieb immer innerhalb 0,02 Volt und ist somit zu vernachlässigen.)

Als Fehlerquelle käme zunächst der Entladungsstrom in  $E$  in Betracht. In der Hauptsache ist aber sein magnetisches Feld durch die symmetrischen Rückleitungen aufgehoben und durch das Panzersystem noch weiter abgeschwächt. Eine Wirkung könnte zustande kommen durch eine Asymmetrie des Entladungsstromes gegen die Rückleitungen. Der Einfluß dieses Stromes auf das Magnetsystem wurde auf verschiedene Weise festgestellt:

1. War das Vakuum nicht hoch genug, so gelangten die Kathodenstrahlen nicht bis zur Elektrode  $F$ , während der Entladungsstrom in  $E$  dieselbe Größe und Verteilung behielt. Der Einfluß war bei diesen Verhältnissen nicht nachweisbar.

2. Durch eine kleine Überhitzung der Wehneltkathode konnte der Glimmstrom von  $< 0,001$  Amp. in eine Bogenentladung von  $> 0,1$  Amp. übergeführt werden. Zeigte dabei das Galvanometer wegen vergrößerter Gasdichte keinen Strom, so blieb der Ausschlag des Magnetsystems innerhalb 0,5 bis

höchstens 20 Skt. Das ergibt also für den Glimmstrom  $< 0,2$  Skt.

3. Durch eine Drehung der Kathode wurde das Kathodenbündel von der Öffnung  $L$  abgewendet. Die Stromverhältnisse in der Röhre  $E$  haben sich dabei nicht wesentlich verändert, das Galvanometer zeigte aber keinen Ausschlag. Die Ablenkung des Magnetsystems blieb innerhalb 0,5 Skt.

Als zweite Fehlerquelle wäre die Änderung des Heizstromes zu berücksichtigen, die beim Einsetzen der Entladung erfolgt. Diese Änderung beträgt bis zu 0,05 Amp. Der Heizstrom selbst (3—4 Amp.) bewirkte aber eine Ablenkung, die 2—10 Skt. betrug. Es bleibt also ein Einfluß von höchstens 0,2 Skt. möglich.

Schädlicher könnte eine Asymmetrie des Kathodenbündels in der Röhre  $W$  wirken. Es könnte die magnetische Wirkung der von der Silberschicht aufgefangenen Ladung nicht ganz kompensiert werden. Wurde aber die Kathode so gedreht, daß das Galvanometer einen maximalen Ausschlag zeigte, so war durch den Calciumoxydfleck, das Diaphragma  $L$  und die Elektrode  $F$  die Richtung des Kathodenbündels genügend genau bestimmt. Durch azentrische Stellung der Kathode und entsprechende Drehung konnte der Einfluß dieser Fehlerquelle im ungünstigsten Falle abgeschätzt werden. Der Unterschied der Ausschläge bei gleichem Galvanometerstrom betrug weniger als 5 Proz.

Endlich könnte die Eichung noch einen Fehler hineinbringen und zwar aus folgenden Gründen:

1. Der Draht, der den Kathodenstrahl ersetzte, hatte eine andere Dicke und eine andere Stromdichtenverteilung im Querschnitt.

2. Der Draht konnte nicht genau auf dieselbe Stelle zwischen den Magneten gebracht werden.

Durch Verschiebung des Drahtes innerhalb der fraglichen Zone wurde dieser Fehler abgeschätzt. Er beträgt nicht über 2 Proz.

Fassen wir alles zusammen und berücksichtigen die Inkonstanz des Nullpunktes, so kann man wohl behaupten, daß die Einstellung innerhalb 1 Skt. sicher durch die Kathodenstrahlen bestimmt wird und mit einem Fehler von höchstens



4 Proz. gemessen wird. Bei 50 Skt. Ausschlag ist der wahrscheinliche Fehler auf 2,5 Skt. — 5 Proz. zu schätzen; bei 20 Skt. kann er bis 10 Proz. betragen.

Auf die Erreichung einer größeren Genauigkeit, die wohl keine Schwierigkeiten bieten würde, ist kein Gewicht gelegt worden, da die Grundfrage nach der Äquivalenz der Kathodenstrahlen und eines Leitungsstromes in bezug auf das magnetische Feld auch bei der erreichten Genauigkeit eindeutig entschieden ist.

#### Messungen.

In der folgenden Tabelle sind einige Messungsergebnisse zusammengestellt:

<i>G</i>	<i>M</i>	<i>M/G</i> für Kathodenstrahlen	<i>M/G</i> für Leitungsstrom
4,0	14	3,5	3,45
3,2	10	3,1	3,45
13,5	48	3,5 <sub>6</sub>	3,6
6	22	3,6 <sub>7</sub>	3,5
0,1	< 1	—	—
4	15	3,7	3,45

In der ersten Kolumne ist der Galvanometerausschlag in Skalenteilen (1 Skt. —  $6 \cdot 10^{-6}$  Amp.) angegeben, in der zweiten der Ausschlag des Magnetsystems, in der dritten der Quotient beider und in der vierten endlich die Empfindlichkeit des Systems für einen entsprechenden Leitungsstrom im Metalldraht.

Mit einem größeren Fehler, aber nicht systematischer Natur waren Versuche mit der zweiten Röhre und einem weniger empfindlichen Magnetsystem behaftet, wobei die Bogenentladung benutzt wurde. Bei den kleinen Ausschlägen < 12 mm kamen Abweichungen bis 20 Proz. vor.

Einen sehr großen Effekt hatte die Entladung eines Induktoriums. Die Stromstärke des Galvanometers erreichte da ca. 170 Skt. Der Ausschlag des Magnetsystems war 500–600 mm. Der Strom war aber nicht konstant genug, um genaue Einstellung zu erlauben. Der Ausschlag entspricht ganz dem nach der Eichung zu erwartenden. Qualitativ ist der Versuch mit

einem Induktorium sehr überzeugend und zu einer Demonstration recht gut geeignet.

**Zusammenfassung.**

1. Die Versuche von H. Hertz, J. v. Geitler und E. Klu-pathy haben die Frage nach der magnetischen Wirkung der Kathodenstrahlen offen gelassen.

2. Die angegebene Versuchsanordnung schaltet alle Nebenwirkungen der Entladung aus und stellt das Magnetsystem unter die Wirkung von Kathodenstrahlen, die gleichzeitig gemessen werden.

3. Das magnetische Feld der Kathodenstrahlen wird durch die pro Zeiteinheit transportierte Elektrizitätsmenge bestimmt. In bezug auf magnetische Wirkungen sind die Kathodenstrahlen einem Leitungsstrom von gleicher Stromstärke innerhalb der Meßgenauigkeit ca. 5 Proz. äquivalent.

St. Petersburg, Physik. Laboratorium d. Polytechnikums.

(Eingegangen 21. März 1911.)

1910.

PROGRAMME  
DE LA  
SOCIÉTÉ BATAVE  
DE  
PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE  
DE  
ROTTERDAM.

---

1. QUESTION 105.

Attendu qu'il importe de posséder des données statistiques exactes relatives à la constitution des diverses circonscriptions administratives de polders (Hoofd-Waterschappen), la Société, voulant continuer ses efforts, déjà couronnés de succès à ce sujet, a résolu de proposer la question suivante:

„Donner la description statistique d'une des circonscriptions poldériennes (Hoofd-Waterschappen) de quelque partie des Pays-Bas.”

La réponse à cette question doit indiquer: La situation, la configuration et l'étendue de la circonscription. La hauteur des terres comparée au plan de niveau passant par le zéro de l'échelle de l'étiage d'Amsterdam (A. P). La division de la circonscription en polders ou autres divisions hydrologiques, ayant un étiage d'été différent. Une description succincte des moulins ou d'autres appareils servant à l'écoulement des eaux surabon-

dantes, laquelle description devra pouvoir servir à déterminer le volume des eaux élevées et la hauteur d'élévation. L'indication des changements apportés à ces machines pour en augmenter le rendement, et l'effet obtenu, soit dans le volume des eaux, soit dans la hauteur d'élévation. La description des voies ou canaux d'écoulement, indiquant leur cours et leur section transversale, les écluses ou autres barrages ou retenues qui s'y trouvent, pouvant influencer sur l'écoulement. On y joindra une notice historique sur les projets formés pour améliorer le dessèchement, en indiquant les résultats obtenus en cas d'exécution. Enfin la description des moyens de défense contre les eaux extérieures et les effets obtenus.

## 2. QUESTION 105a.

„La description d'une circonscription poldérienne (Hoofd-Waterschap) exclusivement chargée du soin d'arrêter l'eau.”

Un aperçu historique sur l'administration, l'entretien et les événements survenus aux barrages ou aux autres retenues; description de l'état actuel de la retenue: des digues, des écluses etc., du profil, des dimensions et de la disposition des écluses; de la nature des terrains; des hauteurs des eaux qui doivent être arrêtées et des circonstances qui les peuvent influencer; de la défense des digues; des moyens d'amélioration qui peuvent être appliqués. Indication des régions, qui sont intéressées à la conservation de la retenue et qui sont obligées à contribuer aux frais d'entretien, des champs et des personnes contribuables, des droits de digue et des contributions et de l'emploi qu'on en a fait dans les dernières années pour l'entretien, les réparations, les améliorations, les frais d'administration etc.

## 3. QUESTION 117.

L'histoire des changements survenus dans le cours des rivières et devant leurs embouchures, ainsi que des événements, qui ont été les causes ou les conséquences de ces changements, est d'une grande importance pour la connaissance de l'état actuel de nos

rivières. Des données nombreuses et dignes d'attention se trouvent disséminées dans des dissertations spéciales, dans les délibérations et résolutions de différents collèges d'administration. Il pourrait être utile de les recueillir et de les soumettre à la connaissance des personnes intéressées.

Voilà pourquoi l'on désire :

L'histoire et la description d'une des principales rivières des Pays-Bas ou d'une partie de celles-ci.

4. QUESTION 130.

On demande un exposé de la composition anatomique et chimique ainsi que des fonctions vitales d'une ou de plusieurs espèces d'une famille de plantes, qui n'a pas encore été soumise à un pareil examen ou du moins pas d'une manière satisfaisante.

La réponse devra être accompagnée des figures nécessaires, sur une échelle convenable, pour donner une idée bien nette de la chose.

5. QUESTION 141.

La Société demande une revue critique exacte de nos connaissances actuelles sur les volcans et les phénomènes volcaniques dans l'Archipel des Indes Orientales, et une explication de l'origine de ces volcans, basée sur ces données, et s'il se peut, sur des recherches personnelles.

6. QUESTION 146.

La Société désire un projet praticable et non trop dispendieux, propre à utiliser le limon pour le défrichement de nos terrains.

7. QUESTION 153.

On désire une méthode, ainsi qu'un instrument, propres à fixer de la manière la plus simple la hauteur de quelques points de

niveau de l'eau, dans un même profil, d'une de nos principales rivières, à l'égard d'un plan horizontal. Et de plus, la communication du résultat de quelques expériences faites avec cet instrument.

1<sup>o</sup> Dans une partie très tortueuse d'une rivière.

2<sup>o</sup> Dans une partie rectiligne en présence d'une crue importante et d'un courant rapide.

8. QUESTION 155.

On désire :

Une recherche expérimentale sur la cause de la phosphorescence, spécialement chez les animaux d'un ordre inférieur.

9. QUESTION 156.

On désire :

Une étude expérimentale des propriétés électriques de quelques alliages métalliques.

10. QUESTION 164.

On demande une détermination exacte des indices de réfraction et des coefficients d'absorption de substances à dispersion anormale, dans diverses parties du spectre et pour diverses densités de ces substances. On discutera les résultats avec soin, au point de vue des diverses théories sur la dispersion anormale, tenant compte également de la forme des courbes de dispersion et d'absorption dans le domaine d'absorption. On déterminera le spectre d'absorption de ces matières, ainsi que le spectre de la couleur superficielle qu'elles laissent fréquemment observer.

11. QUESTION 165.

On demande une étude expérimentale sur le siège et la grandeur des forces magnétoélectriques d'un aimant ou d'un électroaimant cylindrique, qui tourne autour de son axe.

12. QUESTION 170.

Dans la seconde moitié du 19<sup>me</sup>. siècle un grand nombre de rivières soumises à l'influence du flux et du reflux ont été

améliorées aussi bien dans ce pays, que dans les pays étrangers, de telle manière que la grande profondeur exigée par les grands navires de notre temps est atteinte et maintenue avec succès. La société demande une description critique et comparée des mesures prises à cet effet, ainsi qu'une discussion des principes, sur lesquels ces améliorations sont fondées, et de la voie à suivre pour vaincre le mieux les difficultés encore existantes.

18. QUESTION 175.

Vu la divergence d'opinions existant encore sur la nécessité d'appliquer dans différentes circonstances les machines à vapeur au dessèchement des polders,

On demande :

Un aperçu historique du dessèchement d'une ou de plusieurs circonscriptions poldériennes (Hoofd-Waterschappen) actuelles, contenant, pour autant qu'il importe au sujet, la description du polder, la relation du dessèchement antérieur au moyen de moulins à vent, des données sur les machines à vapeur qui y furent substituées, l'histoire de l'extension ultérieure de l'emploi des machines à vapeur, enfin le tableau de l'état du polder ou de la circonscription de polders (waterschappen) pour ce qui concerne le dessèchement obtenu.

14. QUESTION 177.

La Société demande des déterminations expérimentales, exécutées avec le plus grand soin, du poids atomique d'au moins un élément, qui n'est pas encore assez connu.

15. QUESTION 179.

ALEXANDRE VON HUMBOLDT a déjà soupçonné, que la transition de la terre à la mer influence le magnétisme terrestre, comme il résulterait des inflexions des isogones, isoclines et isodynates. Des observations ultérieures semblent confirmer ceci.

C'est pourquoi l'on demande :

Une discussion critique des observations relatives à ce phénomène.

16. QUESTION 181.

La Société demande une description des conditions vitales et des propriétés d'une ou de plusieurs espèces de moisissures, de levures ou de bactéries, qui sont importantes pour quelque grande branche d'industrie, p. e. pour l'agriculture, l'horticulture, la fabrication du beurre et du fromage, celle de la bière ou du vinaigre, la distillation de l'alcool etc., ainsi que de la manière dont ces organismes influencent la pratique de cette branche d'industrie.

17. QUESTION 185.

La Société demande un aperçu critique des différentes théories émises pour l'explication du vol et des recherches expérimentales, qui forment la base de ces théories.

18. QUESTION 186.

La Société demande une étude théorique et expérimentale sur les causes de l'écart de la loi de dilution d'Ostwald, qu'on observe quand des acides forts et des bases fortes et leurs sels neutres sont dissous dans l'eau ou dans d'autres liquides.

19. QUESTION 187.

La Société demande des mesures directes et exactes de la pression osmotique dans des solutions, qui ne montrent pas de dissociation électrolytique, surtout en vue de la détermination de la limite de concentration, à laquelle les écarts des lois de Boyle et de Gay-Lussac deviennent sensibles.

20. QUESTION 190.

On demande une étude chimique et bactériologique de l'eau d'un fleuve, dans lequel s'écoulent les eaux sales et les immondes des égouts d'une grande ville, afin de déterminer l'état d'impureté, dans lequel se trouve l'eau à plusieurs endroits du fleuve.

21. QUESTION 192.

On demande une étude sur l'origine et la signification



physiologique de la matière colorante verte dans le corps des animaux articulés verts.

22. QUESTION 193.

De nouvelles recherches sont demandées sur l'action du soufre en poudre et des sels de cuivre sur les parasites causant des maladies de plantes. On demande aussi une étude sur l'action d'autres sels minéraux sur le développement des champignons (fungi).

23. QUESTION 194.

On demande des recherches sur le rôle, rempli par les micro-organismes, dans la transformation de matières végétales en humus dans le sol.

24. QUESTION 196.

La Société demande des recherches sur la présence, le développement et les propriétés du latex qui donne le caoutchouc dans une ou plusieurs espèces de plantes, avec une étude comparée du caoutchouc préparé des diverses parties d'une même plante.

25. QUESTION 197.

L'écoulement à la mer des eaux souterraines dans les dunes est-il modifié sensiblement, quand on puise à la nappe d'infiltration?

L'épuisement de l'eau diminue-t-il la solidité du pied des dunes extérieures?

26. QUESTION 198.

Quand les différents points de la ligne visuelle sont successivement le siège d'un phénomène lumineux par la propagation d'une action chimique ou électrique, on a avancé que la vitesse de propagation du phénomène influe sur la longueur d'onde.

La Société demande une recherche expérimentale.

27. QUESTION 199.

On demande une étude sur les variations et les perturba-

tions magnétiques, qui étende et corrige nos connaissances de ces phénomènes.

28. QUESTION 200.

On pourra probablement découvrir les conditions, qui régissent les échanges entre les constituants des globules du sang et de leur milieu, en étudiant la perméabilité des globules rouges et s'il est possible aussi des globules blancs pour les ions de  $\text{NaCl}$ ,  $\text{NaN}\text{O}_3$ ,  $\text{Na}_2\text{S}\text{O}_4$  et des sels de potassium correspondants.

La Société demande en conséquence une étude expérimentale, reposant sur l'analyse chimique, touchant la perméabilité des globules rouges du sang et s'il est possible aussi des globules blancs pour les ions susdits.

29. QUESTION 204.

Dans le „Journal of physical chemistry” V, p. 339—p. 392, 1901, LOUIS KAHLENBERG a publié un travail tendant à prouver que la théorie d'Arrhenius sur la *dissociation électrolytique* ne s'accorderait pas avec les phénomènes montrés par plusieurs solutions.

Il résulte entre autres de ses recherches sur l'élévation du point d'ébullition par  $\text{NaCl}$ ,  $\text{KCl}$ ,  $\text{KBr}$ ,  $\text{KJ}$ ,  $\text{MgCl}_2$  et  $\text{BaCl}_2$ , que le poids moléculaire de ces substances, dissoutes dans l'eau, diminuerait régulièrement avec la concentration, et qu'il serait dans les solutions à 20 pour cent des quatre premiers sels inférieur à la moitié du poids moléculaire „théorique” et chez les deux derniers sels inférieur au tiers du poids moléculaire théorique.

D'où il résulterait que la dissociation des molécules augmente avec la concentration, ce qui est exactement l'inverse de la proposition d'Arrhenius. La conductibilité moléculaire du courant électrique de ces substances augmente régulièrement avec la dilution, conformément à la théorie d'Arrhenius.

L'abaissement du point de congélation par  $\text{KCl}$  et  $\text{NaCl}$  n'a pas donné une grande différence pour le degré de dissociation, avec la méthode de la conductibilité moléculaire.

M. KAHLENBERG invoque également les mesures de la

diminution de la tension de la vapeur à 0° exécutées par M. DIETERICI (Wied. Ann. 62, p. 616, 1897), entre autres de NaCl et de  $\text{CaCl}_2$ . Elles montrent un décroissement de la diminution moléculaire de la tension, quand la dilution augmente, contrairement à la théorie.

Faisant mention des mesures de M. DIETERICI, M. OSTWALD (Zeitschrift für phys. Chem. 26 p. 179, 1898) remarque, qu'elles ne seront pas très-exactes et de plus qu'elles n'auront pas, pour la théorie de la dissociation, l'importance, que M. DIETERICI en attend, à cause du faible intervalle de concentration. M. ABEGG en a donné une critique dans les annales de WIEDEMANN 64 p. 486 — p. 506, 1898.

C'est pourquoi la Société demande de déterminer la diminution de la tension de vapeur des solutions aqueuses de NaCl, KCl,  $\text{CaCl}_2$  et de  $\text{MgCl}_2$  entre les températures 0°-100° pour au moins six concentrations différentes, commençant avec des solutions peu concentrées. Elle demande pour les mêmes solutions la détermination de la conductibilité moléculaire, de l'abaissement du point de congélation et de l'élévation du point d'ébullition.

### 30. QUESTION 205.

Comme la connaissance de la composition chimique de plusieurs espèces de fruits est encore très-incomplète, la Société demande les analyses de quelques fruits cultivés en Hollande, et l'étude des changements que subissent les constituants aux divers états de maturité. On fera particulièrement attention à la nature des sucres et des acides, qui apparaissent dans les fruits, sur la formation d'éthers composés et sur les constituants de la cendre. Il est désirable de prendre une ou plusieurs variétés déterminées d'une même espèce de fruit, et de faire l'étude de la même variété avec des exemplaires croissant sur différents sols.

### 31. QUESTION 206.

Pour la défense du rivage au-dessous du niveau des basses mers contre les éboulements et les glissements on a appliqué dans la Province de Zélande depuis 1876 le système

des points fixes, au lieu de la défense par des fascinages ou des enrochements, soit continus, soit espacés.

On demande une description de la manière, dont le système a été exécuté le long de quelques parties de digue, des résultats obtenus, ainsi qu'une comparaison avec les systèmes cités ci-dessus au point de vue technique et économique.

32. QUESTION 207.

La Société désire une étude clinique, rigoureusement contrôlée par des autopsies, qui décide s'il faut admettre une *localisation de fonctions* pour les actions du cervelet.

33. QUESTION 203.

Pour déceler la quinine on se sert fréquemment de la réaction thalléioquinique, c'est à dire une coloration vert émeraude, qui prend naissance si l'on ajoute à une solution de quinine successivement une solution aqueuse de chlore ou de brome et une solution d'ammoniaque. Quoique cette réaction ait déjà été découverte en 1835, elle n'est pas encore chimiquement expliquée. On sait seulement que la thalléioquine peut être isolée, et que la paraméthoxyquinoline donne une coloration semblable. Autrefois le prix élevé des alcaloïdes des quinquinas a pu créer certaines difficultés, mais elles n'existent plus à présent, grâce à la culture des quinquinas de Java, et une étude chimique de ce réactif d'une substance aussi importante que la quinine est d'un intérêt pratique et théorique.

La Société demande donc des recherches nouvelles sur la réaction thalléioquinique, et particulièrement une étude expérimentale du caractère chimique et de la structure de la thalléioquine pure.

34. QUESTION 211.

Comme il y a encore incertitude sur l'influence mutuelle de deux combinaisons chimiques simples comme le sulfate de potassium et le sulfate de soude et particulièrement comme il est incertain si la glasérite a une composition constante, on demande :

Une étude systématique de l'action mutuelle des sulfates de potassium et de soude entre la température la plus basse, qui offre encore de l'intérêt, et le point de fusion, effectuée à la pression de l'atmosphère. Il faudra surtout avoir égard à l'influence de la vitesse de séparation sur le produit naissant et à la cause du phénomène lumineux, qui accompagne cette séparation.

35. QUESTION 212.

Dans l'analyse microchimique de substances inorganiques selon les méthodes de H. BEHRENS on reconnaît les métaux sous le microscope par la formation de combinaisons métalliques complexes, qui cristallisent parfaitement, et qui ont un poids moléculaire très élevé.

Dans plusieurs cas on ne connaît pas encore la nature, la composition et les propriétés macrochimiques de ces combinaisons, et il est possible que plusieurs appartiennent à de nouveaux groupes de combinaisons.

C'est pourquoi la Société demande une étude d'un ou de plusieurs groupes de ces combinaisons, et des combinaisons analogues d'autres métaux.

36. QUESTION 213.

C'est un phénomène connu que l'envasement des différents ports, qui sont situés sur le cours inférieur de nos rivières et qui ont une communication directe avec ces rivières, est d'autant plus prononcé que ces ports sont plus près de la mer.

Le progrès de l'envasement est trop grand pour qu'il puisse être attribué exclusivement, ou même principalement à l'augmentation de la variation des marées dans ces rivières dans la direction de la mer.

On désire avoir, pour une ou pour plusieurs de nos rivières, une constatation basée sur l'observation du phénomène indiqué et une explication raisonnée, au besoin confirmée par des expériences.

37. QUESTION 214.

Quand on essaie de se rendre compte de la puissance d'épuisement des machines à vapeur dans un polder, en posant comme nécessaire que la quantité maximum d'eau atmosphérique, rassemblée dans les conduites d'eau du polder pendant un certain nombre de jours, soit repompée dans le même temps, on rencontre deux facteurs, qui ne sont pas connus avec assez de certitude. Ces facteurs sont :

1<sup>e</sup> La quantité d'eau, qui pendant le nombre de jours considéré, peut être négligée dans le calcul parce qu'elle s'évapore du sol du polder, sans atteindre les conduites d'eau.

2<sup>e</sup> La quantité d'eau, qui ne roule pas dans les conduites d'eau pendant ce nombre de jours, parce qu'elle reste dans le sol.

On demande de rechercher, pour un ou plusieurs de nos polders, si les quantités d'eau visées sous 1<sup>e</sup> et 2<sup>e</sup> peuvent être constatées par des faits, déduites des observations, ou établies par les expériences.

38. QUESTION 215.

On demande une recherche quantitative sur la radiation d'une couple de gaz simples dans un champ magnétique.

39. QUESTION 216.

Il a été démontré à plusieurs reprises que les lignes d'une même série spectrale sont décomposées d'une manière semblable dans un champ magnétique.

On demande, inversement, de chercher par la décomposition spectrale des séries spectrales jusqu'ici inconnues dans un des groupes métalliques.

40. QUESTION 217.

On demande des déterminations quantitatives nouvelles sur la répartition du radium dans l'écorce terrestre (Strutt, Proc. London Royal Society 1906) et on désire spécialement aussi une étude à cet égard des roches de nos colonies.

41. QUESTION 218.

On désire une description topographique et géologique des

iles du district de Babar, résidence d'Amboine (comprenant les iles Babar, Dai, Dawëra, Dawëloor, Marsela, Wetan, Sërmata, Këlapa et Louang), illustrée par une carte à l'échelle de 1 : 200.000 au minimum.

Comme on a rencontré déjà à Babar des ammonites jurassiques et à Louang du calcaire permien, il sera bon d'attacher tous ses soins à collectionner des fossiles.

42. QUESTION 219.

On désire, sur la variété de souris communément appelées souris dansantes (ou souris japonaises), une étude documentée, si possible généalogique, mais en tout cas fonctionnelle, au point de vue des fonctions statiques et auditives, et anatomique en ce qui concerne l'organe auditif et le système nerveux central.

43. QUESTION 221.

Il importe de combler les nombreuses lacunes existant dans nos connaissances sur les *Trypanosomides*, vu surtout la grande importance de ces *Flagellés* comme parasites pathogènes. Le cycle du développement n'est plus ou moins connu complètement que chez *Trypanosoma noctuae*. Ces recherches de SCHAUDINN devront être vérifiées sur d'autres espèces.

La Société demande en conséquence une étude aussi complète que possible sur la structure et le développement d'une espèce quelconque du genre *Trypanosoma*. Il est indiqué de choisir à cet effet *Trypanosoma lewisi*, dont on étudiera donc la structure et le développement, dans le rat et dans le pou du rat (*Haematopinus spinulosus*).

44. QUESTION 222.

La Société demande une étude d'anatomie comparée sur deux ou plusieurs espèces animales étroitement alliées, de préférence de celles qui donnent entre elles des hybrides. On déduira de cette étude des considérations sur les relations phylogéniques entre les divers membres du genre choisi, de manière à élucider la phylogénie du genre lui-même.

45. QUESTION 223.

On demande une étude systématique, expérimentale, avec

des rapports détaillés de dissections à l'appui, touchant l'innervation segmentaire de la peau (dermatométrie) chez une espèce d'oiseau ou de reptile.

46. QUESTION 224.

On demande, sous forme de monographie, une étude sur l'existence et c. q. les modalités d'une action réversible chez des ferments animaux, en particulier les ferments digestifs des mammifères.

47. QUESTION 225.

Il semble résulter des recherches de HERBIG (Zeitschr. f. angew. Chemie 1909, p. 1882), que la teneur en anhydride sulfureux des gaz dégagés par un feu de houille ne constituerait qu'une faible partie de la quantité, théoriquement à déduire de la teneur en soufre du combustible, eu égard aux conditions de combustion et tenant compte du fait, que des combinaisons sulfurées non volatiles restent dans les cendres. D'après HERBIG, la plus grande partie du soufre volatil du combustible prendrait la forme de sulfate d'ammoniaque inoffensif, et se déposerait en majeure partie sous cette forme. — D'autres auteurs (p. ex. Ost, Zeitschr. f. angew. Chemie 1909, p. 2196) ont combattu cette manière de voir. Il serait important d'être mieux renseigné sur la teneur en combinaisons sulfurées volatiles, spécialement en  $\text{SO}_2$  et  $\text{SO}_3$  ( $\text{H}_2\text{SO}_4$ ) libres, des gaz dégagés par les foyers des chaudières, vu la part qui revient peut-être à la fumée dans les dégâts causés aux plantes dans le voisinage des usines.

La Société demande une étude critique sur la teneur en combinaisons volatiles du soufre des gaz, dans une ou plusieurs installations avec chaudière à vapeur de notre pays. Les méthodes employées pour le dosage de l'anhydride sulfureux et de l'acide sulfurique, ce dernier libre et combiné, devront être choisies avec soin, et leur degré d'exactitude devra, au besoin, être mis en évidence. On déterminera la teneur en soufre et en azote du charbon brûlé au cours des expériences, ainsi que la quantité de soufre, qui reste à l'état combiné dans les cendres. On donnera enfin les indications



nécessaires sur la construction des chaudières, la manière de chauffer et la composition de la fumée.

48. QUESTION 226.

On sait que le spath fluor est employé dans beaucoup de fabriques de bouteilles, comme constituant de la pâte, et que cet usage donne lieu à des dégâts fréquents de la végétation environnante, parce que des combinaisons fluorées vont se mélanger aux gaz dégagés par les cheminées de ces usines.

On ne dispose pas de données expérimentales nombreuses sur la quantité et le mode de combinaison du fluor dans les produits gazeux des verreries. Pourtant il y aurait intérêt à être renseigné à ce sujet, surtout au point de vue des dégâts dûs au fluor.

La Société désire donc des recherches expérimentales sur la nature et la quantité des combinaisons fluorées, entraînées avec les gaz de combustion d'une verrerie où l'on fait usage de spath fluor. Si une partie du fluor mélangé à la pâte ne passe pas dans l'atmosphère, il importera d'établir autant que possible où et sous quelle forme cet élément a été retenu. Vu les difficultés inhérentes à un dosage exact du fluor, les méthodes à employer devront être choisies avec soin, et on en établira au besoin le degré de sûreté.

---

## Conditions du Concours.

1. La médaille d'or de la Société, du poids de trente ducats, ou sa valeur monétaire, au choix de l'auteur, sera décernée à celui, dont la réponse à l'une des questions scientifiques proposées aura été jugée satisfaisante par l'Assemblée générale des membres.

2. Les membres de la Société pourront prendre part au concours, à condition qu'ils n'aient contribué, ni à poser la question traitée, ni à l'appréciation des réponses.

3. Les auteurs ne seront pas couronnés, si avant la décision de l'Assemblée, ils se sont fait connaître de quelque manière soit aux directeurs soit aux membres chargés de l'appréciation, à moins que les directeurs n'aient jugé indispensable de demander aux auteurs des éclaircissements.

4. Les mémoires envoyés en réponse devront être rédigés en néerlandais, français, allemand ou anglais; l'écriture en devra être nettement lisible, d'une autre main que celle de l'auteur, ou bien on se servira d'une machine à écrire; les mémoires, expédiés francs de port, devront être le premier février 1912 au plus tard entre les mains du premier secrétaire.

5. Les auteurs ne signeront pas leurs mémoires de leur nom, mais d'une devise, et mentionneront leurs nom et adresse dans un pli cacheté, portant la même devise.

6. Les réponses ne seront acceptées et appréciées par la Société que si elles n'ont pas été antérieurement imprimées.

7. Les plis cachetés accompagnant les réponses couronnées seront immédiatement ouverts dans l'Assemblée générale, ceux accompagnant les mémoires non couronnés seront brûlés dans la même Assemblée sans avoir été ouverts.

8. Les auteurs, dont les mémoires ont été couronnés, en seront informés aussitôt. Ils pourront, dans le moindre délai possible et contre un reçu signé, réclamer le prix au premier secrétaire.

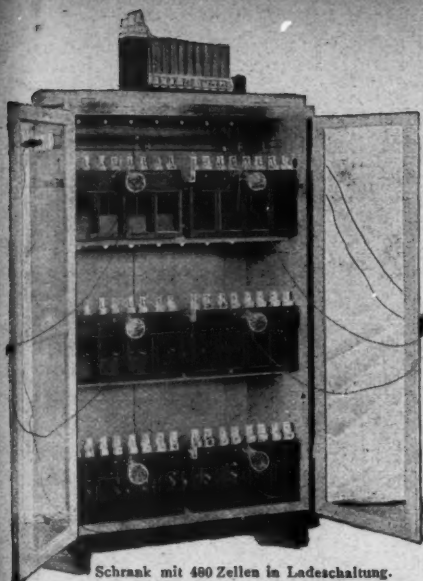
9. Dans le cas où un mémoire couronné serait écrit en collaboration par deux auteurs, ceux-ci auront la faculté de demander deux médailles, chacune de la moitié de la valeur.

10. Au cas où deux réponses à une même question seraient jugées dignes du prix, elles seront couronnées l'un et l'autre.

11. La Société fera imprimer et publiera aussitôt que possible les mémoires couronnés; elle offrira à chacun des auteurs douze exemplaires de leur travail.







Schrank mit 480 Zellen in Ladeschaltung.

## Hochspannungs- Akkumulatoren

nach Prof. Zehnder  
(Ann. d. Phys. 49. p.  
549. 1893; 60. p. 47.  
1897).

Beste Isolation jeder  
einzelnen Zelle von  
Erde.

Leichte Auswechsel-  
barkeit der Platten.  
Übersichtliche Anord-  
nung.

Billige Anschaffungs-  
kosten.

Geringer Raumbedarf.

Illustrierte Preisliste  
zu Diensten.

## FR. KLINGELFUSS & Co., Basel.

Ateliers E. DUCRETET (F. DUCRETET & E. ROGER) Succ<sup>rs</sup>.  
PARIS — 75 rue Claude-Bernard 75 — PARIS

GRANDS PRIX { PARIS 1889 — Anvers 1894 — Bruxelles 1897 — PARIS 1900  
St. Louis 1904 — Liège 1905 — Milan 1906, Membre du Jury

CABINETS DE PHYSIQUE COMPLETS (Catalogues illustrés)

**TÉLÉGRAPHIE SANS FIL:** Les procédés de T. S. F. DUCRETET avec dis-  
positifs d'accord, sont maintenant utilisés pour les grandes distances aussi bien  
en France qu'à l'Etranger. (Tarifs spéciaux à la demande.)

TÉLÉPHONES HAUT-PARLEURS (Brevets Ducretet)

MICROPHONE PUISSANT GAILLARD-DUCRETET

TÉLÉMICROPHONOGRAPHE DUCRETET

Transformateur électrolytique de Faria, redresseur des courants alternatifs.

## F. Hellige & Co., Freiburg im Breisgau.



Gradsichtige Prismen nach Prof. Koenigs-  
berger, zur Projektion von Spektren.  
Sehr lichtstark; große Öffnungen zu  $\frac{1}{2}$   
der Preise von Wernickeschen Prismen.  
Säurefest gekittete Spiegelglasgefäße für  
Absorptions- und Spektralversuche,

Lichtfilter, Neßlerröhren. Alle Formen, alle Größen.  
Galvanometerspiegel, auch besonders dünne von 0,05 mm.  
Ventile für Wasserstrahlpumpen; neues, sicher wirkendes, billiges Modell.  
Ausführliche Prospekte kostenfrei, Verkauf unserer Erzeugnisse durch  
Handlungen einschlägiger Apparate; Adressennachweis auf Verlangen.

# **Arthur Pfeiffer, Wetzlar 0.**

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

**Größte Spezial-Fabrik für Luftpumpen**  
zu wissenschaftlichen Zwecken.

**Alleinvertrieb und Alleinberechtigung zur Fabrikation**

nach 16jährigen Erfahrungen  
verbesserten

**Geryk-Öl-Luftpumpen**

Deutsches Reichs-Patent

der

neuen, rotierenden

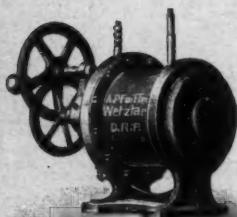
sowie der

**Quecksilberhochvakuumpumpe**

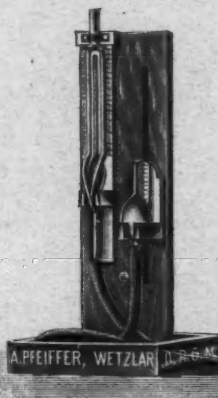
System Pfeiffer

Deutsches Reichs-Patent

in Deutschland



**Quecksilberhochvakuumpumpe,**  
System Pfeiffer, D.R.P.



**Altes Vakuum-Meter**

nach Reiff; früher D.R.G.M.

Ztschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht. 1904. S. 151.



**Neues Vakuum-Meter**

nach Reiff, D.R.G.M.

Meßbereich nach Angabe  
bis zu 0,000001 mm.

**Alle Arten Luftpumpen: Geryk-Öl-Luftpumpen D.R.P.**

Rotierende Öl-Luftpumpen mit großer Sangleistung,  
D.R.P. angemeldet,

Trockene rotierende Luftpumpen,

Trockene Schieber-Luftpumpen,

Rotierende Quecksilber-Luftpumpen,

System Pfeiffer, D.R.P.

Quecksilber-Luftpumpen Sprengelscher u. Geißlerscher Art,

Quecksilber-Spiral-Luftpumpen usw.

**Kompressions-Luftpumpen.**

Alle physikalischen Apparate zu Demonstrationen und wissenschaftl. Untersuchungen.  
Neukonstruktionen nach Angabe. Viele gesetzlich geschützte Originalkonstruktionen.

Prospekte und Listen auf Verlangen.

## Chemikalien und Reagentien

für chemische, therapeutische, photographische, bakterio-  
logische und sonstige wissenschaftliche Zwecke empfiehlt  
in bekannter Reinheit zu entsprechenden Preisen

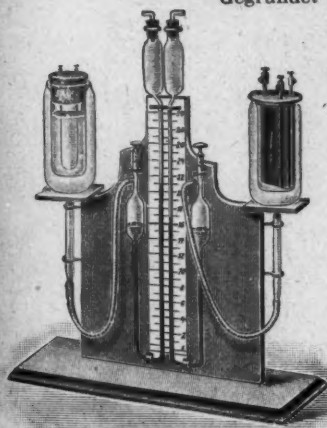
**E. Merck chemische Fabrik Darmstadt.**

## Emil Gundelach, Gehlberg i. Thür. I.

Gegründet 1852



Schutzmarke



Doppel-Thermoskop nach Looser.

**Glasinstrumente  
für wissenschaft-  
liche Zwecke.**

Spezialität:

Physikalische Apparate.  
Vakuumröhren aller Art.  
Röntgenröhren.

Weltausstellung  
St. Louis 1904:

**Grand Prize.**

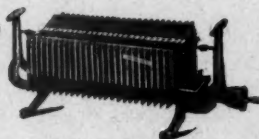
## Gülicher's Thermosäulen mit Gasheizung.

Vorteilhafter Ersatz für galvanische Elemente.

Konstante  
elektromotorische  
Kraft.

Geringer Gasverbrauch.

Hoher Nutzeffekt.



Keine Dämpfe  
kein Geruch.

Keine Polarisation, da-  
her keine Erschöpfung.

Betriebstörungen  
ausgeschlossen.

Alleinige Fabrikanten:

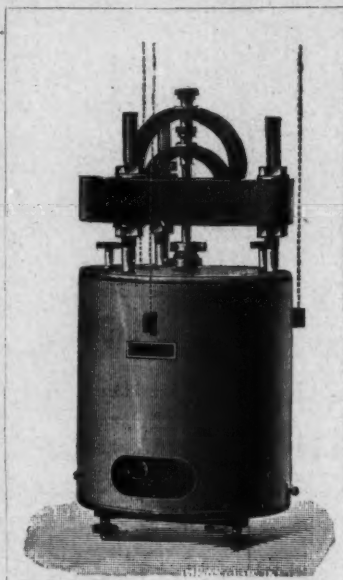
Julius Pintsch, Aktiengesellschaft, Berlin O., Andreasstr. 71/73.



# SIEMENS & HALSKE A.-G.

## WERNERWERK

### BERLIN-NONNENDAMM.



Du Bois-Rubens'sches Panzergalvanometer  
mit dreifachem Panzer und Einrichtung nach  
Hagen zur erschütterungsfreien Aufhängung  
(Julius'sche Methode).

**Hochempfindliche Spiegel-  
galvanometer mit beweg-  
lichen Magnetsystemen,**  
niedrigem oder hohem Eigen-  
widerstand und magnetischer  
Schutzpanzerung.

**Hochempfindliche Spiegel-  
galvanometer mit Dreh-  
spulen mit größter Volt- und  
Stromempfindlichkeit, auch  
mit Einrichtung für große  
Schwingungsdauer und Be-  
nutzung des aperiodischen  
Grenzzustandes für balli-  
stische Messungen. Neben-  
schlüsse dazu für offene und  
geschlossene Stromkreise.**

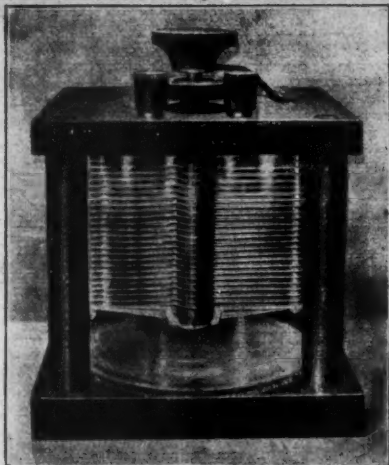
**Apparate für die Bestimmung  
der Induktionskonstanten  
und des Energieverlustes an  
Wechselstromapparaten.**

**Instrumente und Maschinen**

zur Erzeugung von Hochfrequenzströmen für Meßzwecke.  
Normale für Selbstinduktion und gegenseitige Induktion.  
Amperemeter, Voltmeter und Wattmeter für jede Stromart,  
Stromstärke und Spannung.  
Apparate für Eisenuntersuchungen.



**Dr. Erich F. Huth G. m. b. H.**  
**Erdmannshof, Berlin SO. 26.**



Drehkondensator Kapazität 2000 cm.

**Sämtl. Apparate für drahtl. Telegr. u. Telephonie. Komplette Stationen.**  
 Preislisten auf Wunsch kostenlos.

**Dr. H. Geissler Nachf.**

**Frz. Müller, Bonn a. Rh.**

**Fabrik chem. u. physik. Apparate.**

**Spezialitäten: Elektrische Röhren**



Manometer nach Mc.Leod und Kahlbaum

Rowlands Gitter

Quecksilberpumpen

Gasanalysen-Apparate

Elektrolytische Apparate n. Prof. v. Hofmann

Normal-Thermometer

Thermometer nach Beckmann

Thermometer-Sätze nach Gräbe-Anschütz

Präzisions-Meßgeräte und Aräometer " " "

Vacuumthermosäule nach Pflüger

Spectrometer

Kathetometer

Fein geschliffene Hähne spez. für Vacuum

Kataloge auf Verlangen.

Otto Wolff, Werkstatt für elektrische Messinstrumente

Berlin W., Carlsbad 15.

Spezialität seit 1890

Präzisions-Widerstände a. Manganin

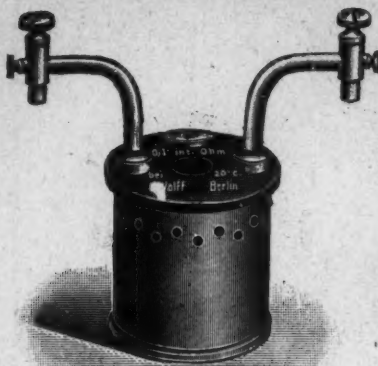
nach der Methode

der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

(Vergl. Zeitschrift für Instrumentenkunde, Juli 1899, Januar 1900, Nov.-Dezember 1900.)

Normalwiderstände von 100 000—0,00001 Ohm für genaue Widerstandsvergleichen und für Strommessungen b. 10 000 Amp. Rheostaten, Wheatstonesche Brücken, Thomsonsche Doppelbrücken für alle Meßbereiche mit Stöpsel- od. Kurbelschaltung, in jeder gewünschten Ausführung. — Kompensationsapparate für genaue Spannungsmessungen. — Kompensationsapparat zugleich Wheatstonesche Brücke. — Normalmessungen beglaubigt von der Physik.-Techn. Reichsanstalt. — Sämtliche Widerstände auch Wansch als Präzisionswiderstände beglaubigt — Verkaufslager von Manganin-Draht und Blech von der Isabellenhütte in Dillenburg.

Illustrierte Preisliste.



# HARTMANN & BRAUN

A.G. FRANKFURT A.M.



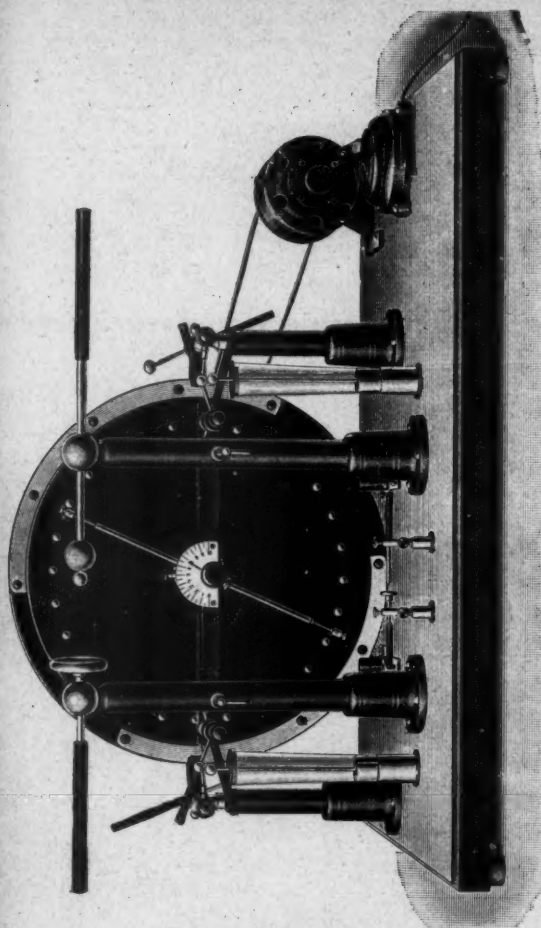
Ablesefernrohre,  
Stative, Fernrohrträger,  
Skalenlaternen,  
Galvanometerspiegel,  
Skalen, Skalenhalter.

Spezialliste zu Diensten.

Nebenstehend: Ablesefernrohr  
mit Universal-Fernrohrträger  
auf Gauss'schem Stativ. ::



# Alfred Wehrsen, Berlin 33



Die Starkstrom - Influenzmaschine nach Wehrsen ist die  
zurzeit beste Maschine von ganz hervorragender Leistung

## Starkstrom-Maschine

Neue, vornehm ausgeführte Preisliste erschienen

Verlag von **Johann Ambrosius Barth** in Leipzig.

## Lichtwellen und ihre Anwendungen.

Von

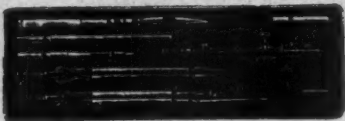
**Dr. A. A. Michelson,**

Professor an der Universität Chicago.

Übersetzt und durch Zusätze erweitert von **Dr. Max Iklé.**

IV, 236 Seiten mit 108 Abbildungen im Text und 3 farbigen Tafeln.

1911. M. 7.60, geb. M. 8.60.



*Paris 1900 Grand Prix*

*St. Louis 1904 Grand Prix*

*Brüssel 1910 2 Grand Prix*

Illustrierte Preislisten gratis.

## Präcisions-Reisszeuge

Astronomische Uhren,  
Compensationspendel.

**Clemens Riefler**

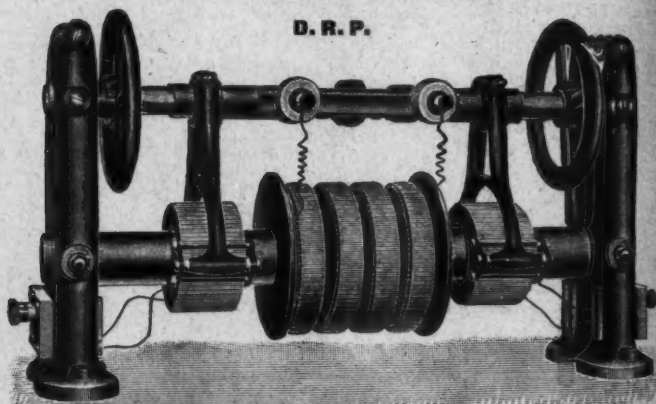
Fabrik mathemat. Instrumente

Nesselwang u. München.

Gegründet 1841.

## Resonanz-Transformatoren

D. R. P.



mit veränderlicher Kopplung und höchstem Nutzeffekt geben **absolut** reine  
oszillatorische Entladungen. — Für jede Periodenzahl und Kapazität. —

**HANS BOAS, BERLIN O. 27.**



**F. Sartorius**

**Göttingen (Hannover)**

Vereinigte Werkstätten für  
wissenschaftliche Instru-  
mente von F. Sartorius,  
A. Becker u. Ludwig Tesdorpf

liefern

## Analysen-Wagen und Gewichte

mit weltbekanntem Ruf. Auf Grund  
40 jähriger wissenschaftlicher und  
praktischer Erfahrung konstruiert.

Durch Patente und Gebrauchs-  
muster gesetzlich geschützt.  
Größte Empfindlichkeit bei  
schnellster Schwingungsdauer.

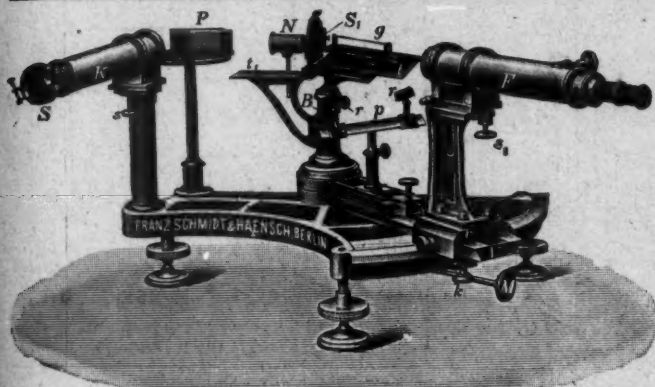
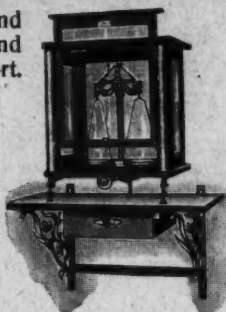
Auf allen beschickten Ausstellungen prämiert.

Weltausstellung Brüssel 1897: Diplome d'hon-  
neur und Preis 500 Frcs. für beste Konstruktion  
in Feinwagen. Paris: Goldene Medaille. —  
St. Louis: Grand Prix und 2 Goldene Medaillen.

Weltausstellung Brüssel 1910:  
4 Grand Prix u. Goldene Medaille

== Katalog kostenfrei. ==

Unsere Fabrikate sind zu Originalpreisen in allen einschlägigen Geschäften zu haben.



Interferenzspektroskop nach Lummer-Gehrke, geliefert an die Physikalisch-techn. Hochschule.

## Neue optische Spezialinstrumente

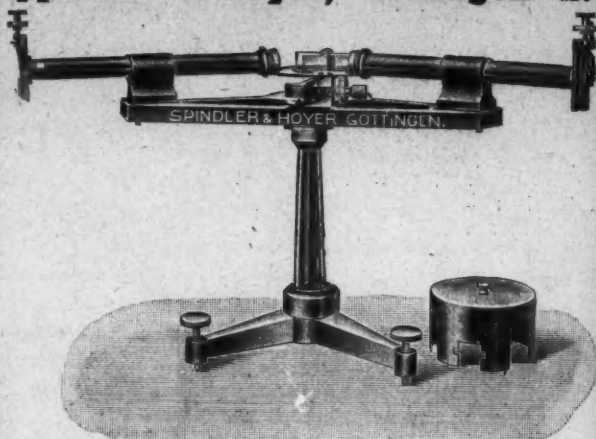
empfohlen

**Franz Schmidt & Haensch, Berlin S. 42,**

Prinzessinnenstraße 16.

== Preislisten kostenlos. ==

# Spindler & Hoyer, Göttingen-A.



Monochromator nach Prof. Dr. W. Voigt  
Spezialprospekt gratis

## R. Burger & Co., Berlin N. 4. Chausseestrasse 8.



Telephon: Amt III 171.

Telegramm-Adr.:

Vakuumglas Berlin.

Goldene Medaille  
1904 St. Louis

Ehren-Diplom  
1906 Mailand

### Spezialfabrik

für physikalische Glasapparate und Instrumente.

Transportbehälter für flüssige Luft.

Preisliste gratis und franko.



Paul Bunge, Mechanisches Institut. Hamburg Ottostr. 13.

Ältestes Konstruktionsbureau für kurzarmige Wagen, gegr. 1866.

Originalkonstruktionen in physikalischen  
und in analytischen Wagen  
in vorzüglicher Ausführung und in allen Preislagen.

Nur erste Preise auf sämtlichen beschickten Ausstellungen.

Preislisten in drei Sprachen kostenfrei.



# Ehrhardt & Metzger Nachf. (Inhaber: K. Friedrichs.)

## — Darmstadt. —

Fabrik und Lager chemischer, elektrochemischer und physikalischer Apparate und Gerätschaften.

Komplette Einrichtungen chemischer und physikalischer Laboratorien. Mikroskopische Utensilien. Sterilisierungsapparate. Brutschränke. Resistenzglas. Weber'sches Glas. Jenaer und Böhmisches Glaswaren.

Spezialapparate für Elektrochemie und Physik.

Mechanische Werkstätten. Tischlerei.

Chemikalien erster Firmen zu Originalpreisen.

Vielfache Auszeichnungen. — Export nach allen Weltteilen.

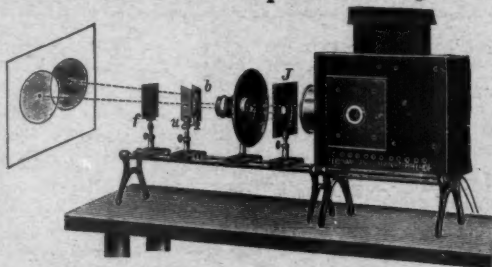
## FERDINAND ERNECKE

Hoflieferant Sr. Majestät des Deutschen Kaisers und Königs

**Mechanische Präzisionswerkstätten**

Ringbahnstr. 4 Berlin-Tempelhof Ringbahnstr. 4

Weltausstellung Brüssel 1910:  
„Großer Preis“, höchste Auszeichnung  
„Ehrendiplom“ und „Gold-Medaille“



Bedrucker 1859

**Altteste Spezialfabrik**  
zur Herstellung physikalischer Unterrichts-Apparate

### Bau-Abteilung:

Vollständige Einrichtung physikalischer und chemischer Lehrsäle, Laboratorien, Vorbereitungs- und Sammlungszimmer

Preisliste Nr. 19 über Einrichtungsgegenstände  
sowie ausführliche Voranschläge auf Wunsch kostenlos.

**Abteilung Schalttafelbau:** Entwurf und Ausführung von Stark- und Schwachstromschalttafeln für Stromstärke- u. Spannungsregulierung

### Abteilung Projektion:

Broschüre über den **Universal-Schulprojektionsapparat, Type NOB**, 120 Seiten umfassend, für die Herren Fachlehrer kostenlos.

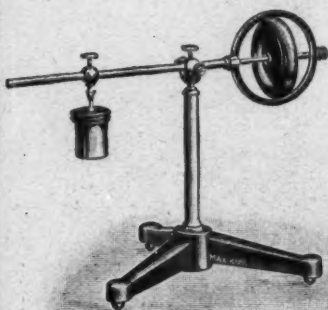
**Epidiaskopische Projektionsapparate.**

Neuer **Hochschul-Projektionsapparat** mit Umbau nach Prot. Kammerer für Photogramme  $16 \times 16$  cm und Diapositive technischer Zeichnungen.

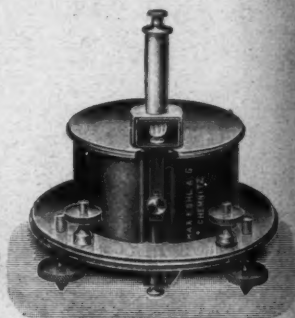
# Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital M. 1600 000

**Physikalische Apparate  
Funken-Induktoren  
Projektions-Apparate**  
in gediegener Ausführung



52 086. Präzessionsapparat  
nach Fessel :: :: M. 40.—



61 398. Drehspul-Spiegelgalvanometer  
nach Ayrton-Mather :: :: M. 100.—

Weltausstellung Brüssel 1910:  
**3 Grosse Preise**  
**1 Goldene Medaille**

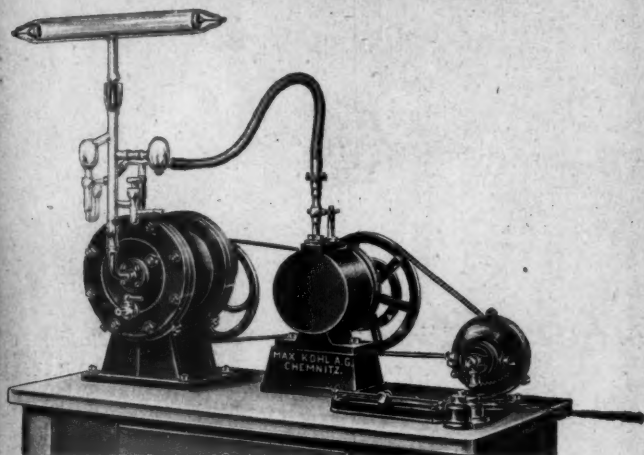


# Max Kohl A.G. Chemnitz

≡≡≡ Volleingezahltes Kapital M. 1600 000 ≡≡≡

## Hörsaal- und Laboratoriums-Einrichtungen

Viele der größten Schulen und Institute des In-  
und Auslandes wurden von uns eingerichtet



Quecksilber-Hochvakuumpumpe mit rotierender Ölluftpumpe  
als Vorpumpe und Elektromotor auf Tisch.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-  
Pumpen :: Ölluftpumpen :: Experimentier-  
Schalttafeln :: Elektrische Normal-, Meß-  
und Regulierwiderstände

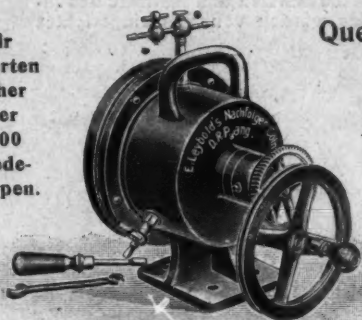
☛ Preislisten und Sonderangebote bereitwilligst. ☛  
Bei Anfragen bitten wir das Gewünschte genau zu bezeichnen.

# E. Leybold's Nachfolger Cöln a. Rh.

Weltausstellung Brüssel 1910: Grand Prix

## Hochvakuum-Apparate nach Gaede:

Wir  
liefern  
bisher  
über  
4000  
Gaede-  
Pumpen.



## Quecksilber-Hoch- vakuumpumpe

mit Ventiltrommel  
(D. R. P.)

Rotierende  
Universal-  
pumpe (D. R. P.),  
als Vakuumpumpe  
und als Gebläse  
verwendbar

**Abgekürzte Präzisions-Vakuummeter** mit direkter Ab-  
lesung 0,00001 mm und selbsttätiger Einstellung (D. R. G. M.)

**Quecksilbermanometer** nach Scheel und Heuse zur Messung  
von Druckhöhen bis zu 30 mm

**Absolutes Bolometer** nach Seddig (D. R. P. angem.)

**Linienwähler und Batteriewähler** für wahlweise Ein-  
schaltung verschiedener Stromkreise nach Seddig

**Elektrische Meßbrücken** mit Stromrückleitungs-Schiene vom  
Schlitten nach Seddig

*Spezial-Preislisten auf Verlangen.*

Alleinige Inseratenannahme durch: Max Geldorf, Eberswalde.  
Mit einer Beilage von Siemens & Halske A.-G., Berlin-Nonnendamm.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

